Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Gépészmérnöki Kar

Energetika, Mechatronika és Terméktervező BSc szakok

Matematika A1H - Vizsga gyakorló feladatsor G

Dátum: 2015. január Munkaidő: 90 perc

1.) (8 pont) Bizonyítsa be azt a tételt, hogy a természetes számok minden nem-üres $H \subset \mathbb{N}$ részhalmazának van $m := \min H$ minimális eleme!

2.) (5 pont) Legyen $I := [a, b]$ korlátos és zárt intervallum. Bizonyítsuk be azt a tételt, hogy ekkor egy tetszőleges folytonos $f \in C[a, b]$ függvény korlátos is!

3.) (8 pont) Vázolja a Jordan-féle területfogalom felépítését! Bizonyítsa be, hogy az a és b oldalú R téglalap területe csak $T(R) = a \cdot b$ lehet!

4.) (3 pont) Tekintsük a következő $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ relációt a valós számok körében: $x\ R\ y$ (azaz $(x, y) \in R$) $\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$, azaz a két szám különbsége racionális! a) Igazolja, hogy ez a reláció ekvivalencia-reláció! b) Mi mondható az ekvivalencia-osztályok számosságáról?

5.) (3 pont) Oldja meg $\mathbb{C}$-ben a $2(z+1)^2 - 2\mathbf{Re}(z) + \overline{z} = \dfrac{14}{z-1} + z$ egyenletet!

6.) (4 pont) Határozzuk meg a $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\mathrm{ch}\,(x)\mathrm{ch}^2(\sqrt{x}) - \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{sh}^2(\sqrt{x})\right) e^{-x}$ határértéket!

7.) (6 pont) Legyen a $\Theta(x)$ függvény az I intervallumon értelmezve, továbbá tegyük fel, hogy két $a < b \in I$ értékre az $A := (a, \Theta(a))$ és a $B := (b, \Theta(b))$ függvénypontokban van alsó támaszegyenese is. Ha ennek a két támaszegyenesnek a meredeksége megegyezik (azaz a két támaszegyenes egymással párhuzamos), akkor lehet-e a két támaszegyenes különböző (avagy szükségképpen egybeesnek)?

8.) (5 pont) Írja fel a $Q := (2/9; 81/2)$ pontban a $\sqrt{xy} = 1 + x^2 y$ egyenletű görbe érintőjének egyenletét!

9.) (5 pont) Számítsa ki az $\displaystyle\int \frac{16x}{(4x^2 - 8x + 5)^3}\,dx$ határozatlan integrált!

10.) (7 pont) Tekintsük az $x(t) := \frac{t}{1+t}$, $y(t) := \ln(1 + t)$ paraméteres egyenletű görbeszakaszt, ahol $0 \le t \le 2$. Mennyi a görbe ívhossza?

11.) (4 pont) Tekintsük az $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x$ egyenletű görbét, ahol $1 \le x \le 2$, és forgassuk körbe az y tengely körül. Mennyi lesz a súrolt felület?

12.) (4 pont) A $\mathrm{tg}\,x$ függvény $(0, \pi)$-ben egy pont kivételével folytonos, de nem korlátos, így Riemann-integrálja sincs értelmezve. Konvergens-e az $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{tg}\,x\,dx$ *improprius* integrál?

Matematika A1H – G feladatsor – Megoldások

1.) (8 pont) Tegyük fel, hogy nem létezik $m := \min H$ – belátjuk, hogy ekkor $H = \emptyset$ (1). Legyen $A := \{n \in \mathbb{N} \ : \ \forall k \le n, k \notin H\}$ (1). Ekkor nyilván $0 \in A$, mert ha $0 \notin A$ volna, akkor az azt jelentené, hogy $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \le 0$, amelyre $k \in H$ (t.i. a $k = 0$), tehát $0 \in H$; márpedig $0 \le n$ ($\forall n \in H$) és így $0 \in H$ minimális eleme volna H-nak, ami nem lehetséges (1).

Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $A = \mathbb{N}$; ehhez azt kell belátnunk, hogy az A halmaz induktív, tehát egyrészt $0 \in A$ (amit most mutattunk meg), másrészt, hogy $\{0, 1, \ldots, n\} \subset A \Rightarrow (n+1) \in A$ (1). Legyen tehát $0, \ldots, n \in A$. Ekkor persze $0, \ldots, n \notin H$. Két eset lehet: a) $n+1 \in H$ és b) $n+1 \notin H$ (1). De az a) esetben $n+1$ H-nak minimális eleme lenne, hiszen $\forall k \in H$ $k \ne 0, 1, \ldots, n$, tehát $\forall k \in H$ $k > n$, $k \ge n+1$ – ez pedig ellentmond a feltevésünkkel (1). Ezért a b) eset lép fel. Így viszont $0, 1, \ldots, n, n+1 \ne H$, és így $(n+1) \in A$ is igazolást nyert (1). Így A induktív, tehát $A = \mathbb{N}$. Végül, ha $A = \mathbb{N}$, akkor $H = \emptyset$, amint állítottuk (1).

2.) (5 pont) Indirekt biz.: ha pl. f nem korlátos felülről, akkor $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x_k \in I,\ f(x_k) > k$ (1). Mivel $(x_k) \subset I$ korlátos, a *Bolzano-Weierstrass tétel* miatt van konvergens részsorozata (1) – feltehetjük, hogy eleve x_k konvergens, azaz $x_k \to x$; mégpedig valamilyen $x \in I$-hez, mert I (korlátos és) zárt (1). A folytonosság miatt ezért $f(x_k) \to f(x)$ (1), ami ellentmonmdás azzal, hogy $f(x_k) \to \infty$. Tehát $f(x)$ felülről korlátos – és hasonlóan alulról is (1).

3.) (8 pont) Korlátos $K \subset \mathbb{R}^2$ halmazokra értelmeztük a $T_*(K)$ belső és a $T^*(K)$ külső területet, és azt mondtuk, hogy egy K halmaznak van Jordan-területe, ha $T_*(K) = T^*(K)$: ekkor a Jordan-terület $T(K) := T_*(K) = T^*(K)$ (1). Az N egységnégyzetre feltettük, hogy $T(N) = 1$, továbbá feltettük, hogy egybevágó halmazokra a terület ugyankkora, és, hogy a terület nemnegatív (ill.: monoton), és additív – $T(A \cup B) = T(A) + T(B)$, ha $A \cap B = \emptyset$ és $\exists\ T(A), T(B)$ – (2). Ilyen tulajdonságok mellett csak egyetlen lehetséges területfogalom van, u.i. (i) előbb beláttuk, hogy egy $n \cdot k$ oldalú $R(k, n)$ téglalap területe csak $T(R(k, n)) = nk$ lehet (mert nk db. egységnégyzet példányra vágható), (ii) aztán, hogy $1/n$ és $1/k$ oldalhossz mellett a terület $1/(kn)$ hasonló egybevágó feldarabolás miatt; (iii) majd, hogy racionális oldalhosszúság mellett az r, s oldalú $R(r, s)$ téglalap területe is rs, (iv) végül, hogy a (monotonitás miatt) az a, b oldalú $R(a, b)$ téglalap területére $rs \le ab \le r's'$ minden $r \le a << r'$, $s \le b \le s'$ racionális közelítés mellett, amiből sup és inf vételével adódott, hogy $\sup_{r \le a, s \le b} rs \le T(R(a, b)) \le \inf_{a \le r', b \le s'} r's'$, tehát $T(R(a, b)) = ab$ (2).

Innen a parallelogramma, majd a háromszög ismert területképlete átdarabolással könnyen adódik. A sokszögeket mindig háromszögekre lehet darabolni, tehát az összes sokszög területe is egyértelműen meghatározott (1+1). Miután a sokszögek területe már egyértelműen ismert, beírt és körülírt sokszögekkel lehet a belső és külső területet, és ezek egyenlősége esetén a Jordan-területet definiálni: $T_*(K) := \sup\{T(S) \ : \ S \subset K \text{sokszög}\}$; hasonlóan T^*-ra (1).

4.) (3 pont) a) Nyilván $x\ R\ x$ (u.i. $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$), tehát R reflexív (1). Az is nyilvánvaló, hogy ha $x\ R\ y$, azaz $x - y \in \mathbb{Q}$, akkor $y - x = -(y - x) \in \mathbb{Q}$, tehát $y\ R\ x$ is teljesül, azaz R szimmetrikus (1). Végül, ha $x\ R\ y\ Rz$, akkor $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$ (mert $(x - y) \in \mathbb{Q}$ és $(y - z) \in \mathbb{Q}$) így $x\ R\ z$ és R tranzitív is (1). Tehát R ekvivalencia-reláció (1).

b) Ha csak véges sok ekvivalencia-osztály lenne, mondjuk $U_1, \ldots, U_n$, és minden osztályban rögzítünk egy $x_k \in U_k$ elemet, akkor $U_k = x_k + \mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^n U_k$ miatt $\#\mathbb{R} = \# \bigcup_{k=1}^n U_k = \#\mathbb{Q} = \omega < c := \#\mathbb{R}$, ami ellentmondás. Általánosabban (pontosabban), ha az ekvivalecia-osztályok számossága mondjuk u, akkor könnyen látható, hogy $\# \bigcup_{k=1}^n U_k$" $= u\omega$" $= u$, ha u

végtelen, és $= \omega$, ha u véges. Ezért mindenképpen végtelen sok osztály van, és az osztályok száma tulajdonképpen $c := \#\mathbb{R}$ kell legyen - kisebb nem lehet, mert akkor a fentiek szerint ellentmondást kapunk, de nagyobb sem lehet, mert minden U osztály tartalmaz a többitől különböző valós számot.

5.) (3 pont) Fel kell tegyük, hogy $z \neq 1$. Beírva, hogy $z = x + iy$, egyenletünk $2(z+1)^2 - 2x + (x - iy) = \frac{14}{z-1} + z$ (1) azaz $2(z+1)^2 = \frac{14}{z-1} + 2z$ alakra jön, amit 2-vel egyszerűsítve és felszorozva $(z-1)$-gyel, $(z+1)^2(z-1) - z(z-1) - 7 = 0$ adódik (1). Ezért $(z+1)^2(z-1) - z(z-1) - 7 = 0$, tehát $z^3 = 8 \Rightarrow z_1 = 2$, és $z_{2,3} = 2e(\pm 2\pi/3) = 1 \pm \sqrt{3}i$ (1).

6.) (4 pont) $8\left(\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}^2(\sqrt{x}) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}^2(\sqrt{x})\right)e^{-x} = \Big((e^x + e^{-x})(e^{2\sqrt{x}} + 2 + e^{-2\sqrt{x}})$ $- (e^x - e^{-x})(e^{2\sqrt{x}} - 2 + e^{-2\sqrt{x}})\Big)e^{-x} = (1 + e^{-2x})(e^{2\sqrt{x}} + 2 + e^{-2\sqrt{x}}) - (1 - e^{-2x})(e^{2\sqrt{x}} - 2 + e^{-2\sqrt{x}}) = 4 + e^{-2x}\{2e^{2\sqrt{x}} + 2e^{-2\sqrt{x}}\}$ (2). Mivel $e^{-2x\pm 2\sqrt{x}} \to 0$ (1), ebből a keresett határérték $\lim_{x\to\infty}\left(\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}^2(\sqrt{x}) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}^2(\sqrt{x})\right)e^{-x} = 1/2$ (1).

Lehet azt is alkalmazni, hogy $\operatorname{ch}^2(\sqrt{x}) = 1 + \operatorname{sh}^2(\sqrt{x})$ (1). Ebből $\left(\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}^2(\sqrt{x}) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}^2(\sqrt{x})\right)e^{-x} = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)\operatorname{sh}^2(\sqrt{x})e^{-x} + \operatorname{ch} x e^{-x} = e^{-x}\operatorname{sh}^2(\sqrt{x})e^{-x} + \frac{1}{2}(1+e^{-2x})$ (1). Az első kifejezés $e^{-x}\operatorname{sh}(\sqrt{x})$ négyzete, és könnyen látható, hogy $e^{-x}\operatorname{sh}(\sqrt{x}) \to 0$, mert pl. $e^{-x}\operatorname{sh}(\sqrt{x}) < e^{-x+\sqrt{x}}$ és $\sqrt{x} - x \to -\infty$ $(x \to \infty)$ (1). A második kifejezésben is $e^{-2x} \to 0$, csak a konstans tag marad, így a teljes határérték 1/2 (1).

7.) (6 pont) Legyen a két támaszegyenes $T_a(x) := mx + \alpha$, $T_b(x) := mx + \beta$, ahol a meredekségek feltevés szerint egyenlőek ugyanazzal az m értékkel, és a konstansok $\alpha := \Theta(a) - ma$, $\beta := \Theta(b) - mb$ – mert a támaszegyenesek áthaladnak A-n és B-n(1+1).

Feltevés szerint ezek alsó támaszegyenesek, tehát $(*)$ $\Theta(b) \geq T_a(b) = mb + \alpha = mb + \Theta(a) - ma = \Theta(a) + m(b-a)$, és $(**)$ $\Theta(a) \geq ma + \beta = ma + \Theta(b) - mb = \Theta(b) - m(b-a)$ (1+1). Ezekből $(*) \Rightarrow \Theta(b) - \Theta(a) \geq m(b-a)$ és $(**) \Rightarrow \Theta(b) - \Theta(a) \leq m(b-a)$, tehát $\Theta(b) - \Theta(a) = m(b-a)$ (1). Ezért $\beta - \alpha = \Theta(b) - \Theta(a) - (b-a)m = 0$, és $T_a \equiv T_b$ (1).

8.) (5 pont) $m = y'(2/9)$ (1) és $L(x) = m(x - 2/9) + 81/2$ (1). A fv. egyenletet deriválva kapjuk, hogy $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{y} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{y}}y' = 2xy + x^2y'$ (1) amiből $y' = \frac{2xy - \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - x^2} = \frac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^{5/2}\sqrt{y}}$ (1) és behelyettesítve $y'(2/9) = \frac{4\cdot 9^{3/2} - 81/2}{2/9 - 2(2/9)^{5/2}\sqrt{81/2}} = \frac{4\cdot 27 - 81/2}{2/9 - 8/27} = \frac{27}{8}\frac{\frac{5}{2}\cdot 27}{3/4 - 1} = -\frac{27}{2}\frac{5}{2}\cdot 27 = -\frac{5\cdot 3^6}{4}$ (1).

9.) (5 pont) $\int \frac{16x}{(4x^2-8x+5)^3}\,dx = \int \frac{16x}{((2x-2)^2+1)^3}\,dx = \int \frac{4y+4}{(y^2+1)^3}\,dy$, ahol $y := 2x - 2$ és $dx/dy = 1/2$. Mivel $(y^2+1)' = 2y$, $\int \frac{4y}{(y^2+1)^3}\,dy = -\frac{1}{(y^2+1)^2}$ (1). A másik integrálra a szokásos $y = \operatorname{tg} z$, $z = \arctan y$ helyettesítéssel $\int \frac{4}{(y^2+1)^3}\,dy = \int \frac{4}{(\tan^2 z+1)^3}\frac{dz}{\cos^2 z} = 4\int \cos^4 z\,dz$ (1) amit már sokszor kiszámoltunk: $= \int (1 + \cos(2z))^2 dz = \int 1 + 2\cos(2z) + + \cos^2(2z) dz = \frac{3}{2}z + \sin(2z) + \frac{1}{8}\sin(4z)$ (1).

Visszahelyettesítve $z = \arctan y = \arctan(2x-2)$ és $\frac{1}{4}\sin(4z) = \frac{1}{2}\sin(2z)\cos(2z) = \frac{1}{2}\frac{1-y^2}{1+y^2}\frac{2y}{1+y^2} = \frac{y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{y}{1+y^2} + \frac{2y}{(1+y^2)^2}$

Így végül $\displaystyle\int \frac{16x}{(4x^2-8x+5)^3}\,dx = 3\arctan(2x-2) + \frac{6x-6}{4x^2-8x+5} + \frac{4x-5}{(4x^2-8x+5)^2} + C$ (1).

10.) (7 pont) $I = \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{1}{1+t}\right)^4 + \left(\frac{1}{1+t}\right)^2} dt = \int_0^2 \frac{\sqrt{1+(1+t)^2}}{(1+t)^2} dt = \int_1^3 \frac{\sqrt{1+s^2}}{s^2} ds$ (1+1).

Innen több utat is választhatunk, pl. $s = \operatorname{tg} u$ vagy $s = \operatorname{sh} v$ helyettesítésekkel.

Az előbbit követve $I = \int_a^b \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\operatorname{tg}^2 u} \frac{du}{\cos^2 u} = \int_a^b \frac{du}{\sin^2 u \cos u} = \int_a^b \frac{\cos u}{(1-\sin^2 u)^2} du = \int_{\sin a}^{\sin b} \frac{dz}{(1-z^2)^2}$, ahol $a = \arctan 1$, $b = \arctan 3$. Az utóbbi integrál parciális törtekre bontható: $\int \frac{dz}{(1-z)^2(1+z)^2} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{(1+z)^2} \right) dz = \frac{1}{4} \left(\log(1-z^2) + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{1+z} \right) = \frac{1}{4} \log(1-z^2) + \frac{1}{2(1-z^2)}$. Visszafejtve, $(1-z^2) = \cos^2 a$ és $\cos^2 b$, tehát $I = \frac{1}{2} \log(\cos b / \cos a) + \frac{1}{2\cos^2 b} - \frac{1}{2\cos^2 a}$, és azt kell tudnunk, hogy $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, amint az a trigonometrikus fv.ek geometriai definíciójából jól látható. Tehát $I = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1/\sqrt{10}}{1/\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2(1/10)} - \frac{1}{2(1/2)} = -\frac{1}{4} \log 5 + 5 - 2 = 2 - \frac{1}{4} \log 5$. (1+...+1).

Az $\operatorname{sh} v = s$ helyettesítést alkalmazva , $I = \int_p^q \frac{\operatorname{ch} v}{\operatorname{sh}^2 v} \operatorname{ch} v \, dv = \int_p^q \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 v}\right) dv = [v + \operatorname{cth} v]_p^q$, ahol $p := \operatorname{arsh} 1$ és $q := \operatorname{arsh} 3$. Így adódik, hogy $I = \operatorname{arsh} 3 - \operatorname{arsh} 1 + \operatorname{cth}(\operatorname{arsh} 3) - \operatorname{cth}(\operatorname{arsh} 1)$, és ezt ki tudjuk számolni, ha megnézzük a képletgyűjteményben, hogy $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, (amit egyébként előadáson háromféleképpen is bebizonyítottunk). Ebből $\operatorname{cth} \operatorname{arsh} x = \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}{\operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}}{x} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. Ezzel tehát $I = \ln \frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{1} = \ln \frac{3+\sqrt{10}}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\sqrt{10} - \sqrt{2}$ (1+1...+1).

11.) (4 pont) Tekintsük az $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x$ egyenletű görbét, ahol $1 \le x \le 2$, és forgassuk körbe az y tengely körül. Mennyi lesz a súrolt felület?

$F = \int_1^2 2\pi x \cdot \sqrt{y'^2(x) + 1} \, dx = \pi \int_1^2 2x \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2 + 1} \, dx = \pi \int_1^2 \sqrt{(x^2-1)^2 + 4x^2} \, dx = \pi \int_1^2 \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1 + 4x^2} \, dx = \pi \int_1^2 \sqrt{(x^2+1)^2} \, dx = \pi \int_1^2 1 + x^2 \, dx = 10\pi/3$.

12.) (4 pont) NEM (1). U.i. ez egy többszörös improprius integrál, mert a $\pi/2$ pontban mindkét oldalról végtelenbe tartanak a függvényértékek, és így két határértékkel kell értelmezni az improprius integrált: tehát $\int_0^\pi \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{a\to\pi/2-0} \int_0^a \operatorname{tg} x \, dx + \lim_{b\to\pi+0} \int_b^\pi \operatorname{tg} x \, dx$, és az improprius integrál csak akkor van értelmezve, ha itt mindkét határérték, külön-külön, konvergens (végesen) (1). (Tehát hibás pl. csak $\lim_{h\to 0}\left(\int_0^{\pi/2-h} \operatorname{tg} x \, dx + \int_0^{\pi/2+h} \operatorname{tg} x \, dx\right)$ vagy hasonlót tekinteni csak!)

Az integrandusnak ismert a primitív fv.e: $-\ln(|\cos x|)$ (1). Ezért pl. $\lim_{a\to\pi/2-0} \int_0^a \operatorname{tg} x \, dx = \lim_{a\to\pi/2-0} [-\ln(\cos x)]_0^a = \lim_{a\to\pi/2-0} -\ln\cos a + 0 = \lim_{t\to+0} -\ln t = \infty$, és így $\int_0^\pi \operatorname{tg} x dx$ divergens (1).

(A $\lim_{h\to 0}[-\ln(\cos x)]_0^{\pi/2-h} + [-\ln(\cos x)]_{\pi/2+h}^{\pi} = \lim_{h\to 0}(-\ln\cos(\pi/2-h) + 0) + (\ln|\cos(\pi/2+h)| - 0) = \lim_{h\to 0} 0 = 0$ okoskodás helytelen, mivel nem így van definiálva az improprius Riemann integrál!)