3. Tekintsük az $A(3, -3, -1)$, $B(2, -2, -1)$, $C(2, -3, 0)$ csúcsokkal meghatározott háromszöget és határozzuk meg a következő két transzformáció kompozíciójánál adódó képét. Az első transzformáció egy 60°-os forgatva tükrözés, amelynek tengelye a $K(2, -3, -1)$ centrumon áthaladó $x = 2 - t$, $y = -3 + t$, $z = -1 + t$ egyenletrendszerű irányított egyenes; a második transzformáció pedig az $x = 2$, $y = t$, $z = 2 + t$ egyenletrendszerű egyenes körüli félfordulat.
(12 pont)

Megoldás:

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix};\ C_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix};\ L_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{bmatrix};$$

$$C_n^2 = L_n - 1 = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\-1 & -2 & 1\\-1 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

A forgatva tükrözés mátrixa: $\bar{R} = -(1 + \cos 60°)C_n^2 + \sin 60°\, C_n - 1 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\end{bmatrix};$

eltolási része pedig: $(1 - \bar{R})k = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-5\\-4\end{bmatrix}.$

A félfordulat H mátrixa: $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix};\ L_v = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix};\ H = 2L_v - 1 = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix};$

eltolási része pedig: $(1 - H)p = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-2\\2\end{bmatrix}.$

A kompozíció mátrixa: $H\bar{R} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix};$

eltolási része: $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\\-4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-6\\-3\end{bmatrix}.$

A transzformált háromszög csúcsai $A'(2, -3, 0)$, $B'(2, -4, -1)$, $C'(1, -3, -1)$. Mindegyik transzformáció a K pontba eltolt „egység-oktaéder” egy-egy szimmetriája, ABC és $A'B'C'$ pedig a test egy-egy lapja.

4. Határozzuk meg a $6x^2 + 24xy - y^2 - 60x - 20y + 80 = 0$ hiperbola csúcsainak koordinátáit és aszimptotáinak egyenletét. (12 pont) Ábrázoljuk is a görbét a koordinátarendszerben. (3 pont)

Megoldás:
$\boldsymbol{A}_{33}$ sajátvektorai: $\boldsymbol{u} = [3/5,\ -4/5]^T$, $\boldsymbol{v} = [4/5,\ 3/5]^T$; a centrum $C(1, 2)$.

Áttérés $(C, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-ről $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$-re: $x = (3/5)\cdot p + (4/5)\cdot q + 1$, $y = -(4/5)\cdot p + (3/5)\cdot q + 2$;
fordítva, $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$-ről $(C, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-re: $p = (3/5)\cdot x - (4/5)\cdot y + 1$, $q = (4/5)\cdot x + (3/5)\cdot y - 2$.

A görbe egyenlete $(C, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$-ben: $p^2/3 - q^2/2 = 1$, $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{5}$;
az aszimptoták egyenlete $\sqrt{2}p \pm \sqrt{3}q = 0$; a csúcsok pedig $C_{12}(\pm\sqrt{3}, 0)$.

Az aszimptoták egyenlete $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$-ben: $(3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{3})\cdot x + (-4\sqrt{2} \pm 3\sqrt{3})\cdot y - 5\cdot(-\sqrt{2} \pm 2\sqrt{3}) = 0$;
a csúcspontok $C_1(3\sqrt{3}/5 + 1,\ -4\sqrt{3}/5 + 2)$; $C_2(-3\sqrt{3}/5 + 1,\ 4\sqrt{3}/5 + 2)$.

1. Adott az *ABCD* négyzet (pozitív körüljárás szerint betűzve) és síkjában a *PQR* háromszög.
a) Forgassuk el a háromszöget a négyzet *A, B, C* majd *D* csúcsa körül rendre $-90°$, $-90°$, $-90°$, $+90°$ szögekkel, előállítva a *P'Q'R'* háromszöget. Mutassuk meg, hogy a *PP', QQ', RR'* egyenesek egy ponton mennek át, és határozzuk is meg ezt a pontot. (6 pont)
b) Tükrözzük a háromszöget rendre az *AB, BD* majd *DA* egyenesekre, így a *P"Q"R"* háromszöget kapjuk. Mutassuk meg, hogy a *PP", QQ", RR"* szakaszok felezőpontjai egy egyenesre illeszkednek, és határozzuk is meg ezt az egyenest. (6 pont)
c) Milyen transzformáció lesz az a) és b) feladatokban leírt transzformációk eredője, ebben a sorrendben alkalmazva őket. (3 pont)

Megoldás: a) *D*-re vonatkozó tükrözés. b) Csúsztatva tükrözés az *A*-n áthaladó *BD*-vel párhuzamos egyenesre a *BD* vektorú eltolási résszel. c) *CA* eltolásvektorú csúsztatva tükrözés.

2. Határozzuk meg az $x^2 - 7y^2 + 3z^2 + 2\sqrt{3}xz = 0$ felület y tengely körüli $+60°$-os elforgatottjának egyenletét, és ennek alapján állapítsuk meg, milyen felületről van szó. (8 pont)

Megoldás:

A forgatás mátrixa: $R = \begin{bmatrix} \cos 60° & 0 & \sin 60° \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 60° & 0 & \cos 60° \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $R^{-1} = R^T$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \qquad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}z' \\ y &= y' \\ z &= \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}z' \end{aligned}$$

A transzformált felület egyenlete $4x^2 - 7y^2 = 0$, ami egy metsző síkpár, metszésvonaluk a z tengely.