1. Határozzuk meg azon pontok halmazát a síkon, amelyek két adott ponttól mért távolságának aránya rögzített állandó (Apollóniosz-kör) (10 pont) .

2. Adott egy kocka $K(4, 3, 1)$ középpontja és egyik élének e: $6(x + 10) = 7(y + 20) = 7z$ egyenese. Határozzuk meg a kocka csúcsainak koordinátáit (12 pont).

Megoldás: e irányvektora $\boldsymbol{v} = (7, 6, 6)$. A K ponton átfektetett e-re merőleges sík α: $7x + 6y + 6z = 52$. A sík és az egyenes metszéspontja $P(4, -8, 12)$. A KP vektor párhuzamos az $\boldsymbol{u} = (0, -1, 1)$ vektorral; $|KP| = 11|\boldsymbol{u}| = 11\sqrt{2}$. Az $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ vektor párhuzamos a $\boldsymbol{w} = (12, -7, -7)$ vektorral; $|KP| = |\boldsymbol{w}|$. Így az e-vel párhuzamos élek felezőpontjainak helyvektora $\boldsymbol{k} \pm 11\boldsymbol{u}$ és $\boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{w}$: $P(4, -8, 12)$, $Q(-8, 10, 8)$, $R(4, 14, -10)$, $S(16, -4, -6)$. Az élek hossza $\sqrt{2}\cdot|KP| = 22 = 2|\boldsymbol{v}|$, így a csúcsok helyvektora $\boldsymbol{p} \pm \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{q} \pm \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{v}$ és $\boldsymbol{s} \pm \boldsymbol{v}$: $A(-3, -14, 6)$, $B(-15, 4, 2)$, $C(-3, 8, -16)$, $D(9, -10, -12)$; $E(11, -2, 18)$, $F(-1, 16, 14)$, $G(11, 20, -4)$, $H(23, 2, 0)$.

3. Stanley-ből (Falkland-szigetek, D.sz. 51° 42' 04", Ny.h. 57° 50' 57") akarjuk elérni a Föld Budapesttel (É.sz. 47° 29' 52", K.h. 19° 02' 25") átellenes pontját. Határozzuk meg az útvonal hosszát, valamint az indulás és az érkezés irányát (6 pont). Adjuk meg az útvonal legdélebben lévő pontjának földrajzi koordinátáit (6 pont). Hol (melyik hosszúsági körön) metszi az egyenlítőt az a főkörív, amely Budapestet az átellenes pontjával köti össze, és az egyenlítőt a legkisebb szögben metszi (4 pont). (A Föld sugarát $R = 6371$ km-nek vegyük.)

Megoldás: Budapest átellenes pontját jelölje B, Stanley-t S, a Déli-sarkot pedig D (a gömbháromszög oldalait ennek megfelelően b, s és d, a szögeit pedig β, σ és δ). B földrajzi koordinátái D.sz. 47° 29' 52", Ny.h. 160° 57' 35".

$b = 0.668\,441\,711 = 38° \, 17' \, 56''$;
$s = 0.741\,803\,717 = 42° \, 30' \, 08''$;
$\delta = 1.799\,618\,688 = 103° \, 06' \, 38''$;
$\cos d = \cos s \cos b + \sin s \sin b \cos \delta = 0.483\,606\,636$; $d = 1.066\,025\,757 = 61° \, 04' \, 44''$;
a távolság $Rd = 6792$ km;

$\cos \sigma = (\cos s - \cos d \cos b) / (\sin d \sin b) = 0.659\,432\,035$; $\sigma = 0.659\,432\,035 = 48° \, 44' \, 36''$;
az indulás iránya: $180° + \sigma = 228° \, 44' \, 36''$;

$\cos \beta = (\cos b - \cos d \cos s) / (\sin d \sin s) = 0.724\,177\,066$; $\beta = 0.760\,956\,007 = 43° \, 35' \, 58''$;
az érkezés iránya: $180° - \beta = 136° \, 24' \, 02''$ felől.

A legdélebbi pont a D-hez tartozó magasságvonal T talppontja. Az STD derékszögű háromszög D-nél lévő szögét jelölje κ, a TD befogót pedig m.

$\mathrm{tg}\, \kappa = 1 / (\cos b \,\mathrm{tg}\, \sigma) = 1.117\,727\,253$; $\kappa = 0.840\,932\,323 = 48° \, 10' \, 55''$;
$\cos m = \cos \sigma / \sin \kappa = 0.884\,828\,830$; $m = 0.484\,669\,827 = 27° \, 46' \, 10''$;

T (nyugati) hosszúsági koordinátája $57° 50' 57'' + \kappa = 106° 01' 52''$;
a (déli) szélességi koordinátája pedig $90° - m = 62° 13' 50''$;

Az egyenlítőt a legkisebb szögben metsző, Budapesten (és így ennek szemközti pontján is) áthaladó főkörív a $19° 02' 25'' \pm 90°$ hosszúsági körökön metszi az egyenlítőt:
K.h. 109° 02' 25", Ny.h. 70° 57' 35".

4. Az egységnyi területű szabályos gömbháromszög mindhárom csúcsa köré egységnyi területű gömbi kört rajzolunk. Határozzuk meg a háromszög körökön kívül eső részének a területét (8 pont). Számítsuk ki azoknak a háromszöggel koncentrikus köröknek a (gömbi) sugarát, amelyek mindhárom kört érintik (4 pont). (A gömb sugara 1.)

Megoldás: Az egységnyi területű kör sugarát jelölje r, a szabályos háromszög oldalainak hosszát s, a szögeit pedig α. A karakterisztikus (derékszögű) háromszögének az eredeti háromszög középpontjában lévő csúcsánál 60°-os szög van, az eredeti háromszög csúcsánál pedig $\alpha/2$. Ez utóbbival szemközti befogójának hossza a beírt kör sugara, a másik befogó hossza pedig $s/2$, míg az átfogó hossza a körülírt kör R sugara.

$1 = 3\alpha - \pi$; $\alpha = (\pi + 1) / 3 = 1.380\,530\,885 = 79° 05' 55''$;
$\cos 60° = -\cos \alpha/2 \cos 90° + \sin \alpha/2 \sin 90° \cos s/2$; $\cos s/2 = \cos 60° / \sin \alpha/2 =$
$0.785\,247\,547$;
$s = 1.335\,401\,009 = 76° 30' 46''$;

$\cos 90° = -\cos \alpha/2 \cos 60° + \sin \alpha/2 \sin 60° \cos R$; $\cos R = 1 / (\mathrm{tg}\, \alpha/2\ \mathrm{tg}\, 60°) =$
$0.699\,155\,404$;
$R = 0.796\,580\,816 = 45° 38' 27''$;

$1 = 2\pi(1 - \cos r)$; $r = \arccos (1 - 1 / 2\pi) = 0{,}571\,953\,761 = 32° 46' 14''$;

$s > 2r$, így a csúcsok köré írt körök nem metszik egymást. Egy csúcs köré írt kör területének $\alpha / 2\pi$ része esik a háromszög belsejébe, így a körök elhagyásával kapott terület:

$1 - 3\alpha / 2\pi = (\pi - 1) / 2\pi = 0.340\,845\,057$;

A három kört kívülről ill. belülről érintő (a háromszöggel koncentrikus) körök sugara $R \pm r$:
$1.368\,534\,577 = 78° 24' 41''$ és $0.224\,627\,055 = 12° 52' 13''$.