1. Legyen *ABC* egy pozitív körüljárású szabályos háromszög, és ennek síkjában legyen adott egy további, tetszőleges *XYZ* háromszög is. **a)** Tekintsük a sík *A, B, C* csúcsok körüli, rendre +60°, +60°, –60° szögű forgatásait. Ezeket ebben a sorrendben végrehajtva a ***T*** eredő transzformációt kapjuk. Jelölje *XYZ* ***T***-nél származó képét *X'Y'Z'*, $\boldsymbol{T}^2$-nél származó képét pedig *X"Y"Z"*. Mit mondhatunk az *XX'X"*, *YY'Y"*, *ZZ'Z"* háromszögekről, (szögeik, típusuk, kapcsolatuk). Mutassuk meg, pl. hogy körülírt köreik koncentrikusak. (6p) **b)** Tekintsük azt a ***K*** transzformációt, amely az *AB*, majd a *BC*, és végül a *CA* egyenesekre vonatkozó tengelyes tükrözések eredőjeként adódik, és jelölje *X*Y*Z** az *XYZ* háromszög ***K***-nál keletkező képét. Mutassuk meg, hogy az *XX** az *YY** és a *ZZ** szakaszok felezőpontjai egy egyenesre illeszkednek. Határozzuk is meg ezt az egyenest. (6p) **c)** Bizonyítsuk, hogy az előbbi ***K*** transzformáció az *AB* oldal *F* felezőpontját olyan *F** pontra képezi, amelyre |*FF**| = (3/2)·|*AB*|. (3p)

Megoldás: **a)** ***T*** egy 60° + 60° – 60° = 60° szögű forgatás egy *P* középpont körül (*P* a *C* csúcs *A*-ra vonatkozó tükörképe), így a kérdezett háromszögek csúcsai a egy-egy *P* középpontú körön helyezkednek el, mindannyian 120° szárszögű egyenlőszárú háromszögek. **b)** ***K*** egy eltolástükrözés 3/2 ***BC*** eltolásvektorral, ill. a *BC*-vel párhuzamos középvonalra vonatkozó tükrözéssel. A kérdezett felezőpontok erre a tükörtengelyre illeszkednek. Ebből következik a **c)** pont állítása is.

2. Állítsuk elő a *P*(–3, 3, 0) ponton áthaladó $\boldsymbol{n} = [2, 2, -1]^T$ irányvektorú (***n***-nel irányított) egyenes körüli 6 egységnyi eltolású negyedfordulatos csavarmozgás homogén koordinátás (4 × 4-es) mátrixát. Homogén koordinátákkal számolva határozzuk meg az *A*(5, –2, 3), *B*(–7, 0, 7), *C*(9, 9, 0) pontok képének koordinátáit is. (8p)

Megoldás:

$$\boldsymbol{C}_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{L}_n = n \cdot n^T = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}_n^2 = \boldsymbol{L}_n - \boldsymbol{1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{4}_n = \boldsymbol{C}_n^2 + \boldsymbol{C}_n + \boldsymbol{1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{4}_n)\boldsymbol{p} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -7 & -4 \\ -1 & 5 & 8 \\ 8 & -4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$|\boldsymbol{s}| = 6; \quad \boldsymbol{s} = 2\boldsymbol{n}; \quad \text{így az eltolási rész} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

A transzformált pontok: *A'*(2, 3, –11), *B'*(0, –1, 1), *C'*(11, 11, –10).

3. Tekintsük az *x*, az *y* és a *z* (irányított) tengelyű +45°-os forgatásokat és alkalmazzuk azokat ebben a sorrendben a $2x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz + 2yz = 4$ egyenletű felületre. Állítsuk elő a végeredményként kapott transzformát felület egyenletét. Mi ez a felület? (12p)

Megoldás:

$$\boldsymbol{R}_z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{R}_y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{R}_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

A transzformációk kompozíciója $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}_z\boldsymbol{R}_y\boldsymbol{R}_x = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-2 \\ -2 & -\sqrt{2}+2 & -\sqrt{2}-2 \\ -2\sqrt{2} & 2 & 2 \end{bmatrix}$

A képpontokat az eredeti pontokba $\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}^T = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+2 & -\sqrt{2}+2 & 2 \\ \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 & 2 \end{bmatrix}$ viszi,

így $\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ y = \frac{\sqrt{2}+2}{4}x' - \frac{\sqrt{2}-2}{4}y' + \frac{1}{2}z' \\ z = \frac{\sqrt{2}-2}{4}x' - \frac{\sqrt{2}+2}{4}y' + \frac{1}{2}z' \end{cases}$

Ezt az egyenletbe helyettesítve $4(z')^2 = 4$ adódik, ami egy párhuzamos síkpár egyenlete.

4. Adott a $9x^2 + 6y^2 - 4xy + 12x - 36y + 44 = 0$ egyenletű ellipszis. Határozzuk meg annak a hiperbolának az egyenletét, amelynek valós és képzetes tengelye rendre egybeesik az ellipszis kis- és nagytengelyével. (12p) Ábrázoljuk a két görbét a koordinátarendszerben. (3p)

Megoldás:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & -18 \\ 6 & -18 & 44 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{A}_{33} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix};$$

ez utóbbi sajátértékei és sajátvektorai $\lambda_1 = 5$; $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\lambda_2 = 10$; $\boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$)-ről ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$)-re a koordináta-transzformáció mátrixa $\boldsymbol{M} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

A centrum egyenletrendszere: $\begin{cases} 9x - 2y + 6 = 0 \\ -2x + 6y - 18 = 0 \end{cases}$ ebből $C(0, 3)$.

Áttérés ($C, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$)-ről ($O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$)-re: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + \boldsymbol{c}$, így $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}p - \frac{2}{\sqrt{5}}q \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}p + \frac{1}{\sqrt{5}}q + 3 \end{cases}$

fordítva, ($O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$)-ről ($C, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$)-re: $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}^T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \boldsymbol{M}^T\boldsymbol{c}$, így $\begin{cases} p = \frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{6}{\sqrt{5}} \\ q = -\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} \end{cases}$

A görbe egyenlete ($C, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$)-ben: $p^2/2 + q^2/1 = 1$, $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = 1$;
a feltételeknek megfelelő hiperbola egyenlete $-p^2/2 + q^2/1 = 1$.
A hiperbola egyenlete ($O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$)-ben: $7x^2 - 2y^2 - 12xy + 36x + 12y + 28 = 0$.