1. Mondjuk ki és bizonyítsuk a Feuerbach-kör tételét. (10p)

2. Az *ABCD* szabályos tetraéder *CD* élének felezőpontja $H(10, 11, 9)$, *AB* éle pedig illeszkedik az e: $7(12 - x) = 8(11 + y) = 8(13 + z)$ egyenesre. Határozzuk meg a test csúcsainak koordinátáit. (12p)

Megoldás: e irányvektora $\boldsymbol{v}_e = (8, -7, -7)$, egy pontja pedig $P(12, -11, -13)$. Az e-re merőleges H-n áthaladó α: $8x - 7y - 7z + 60 = 0$ sík az egyenest a $G(-4, 3, 1)$ pontban, az *AB* él felezőpontjában metszi. $|GH| = 18$ egyben a tetraéder szemközti éleinek távolsága, ami az élhossz $\sqrt{2}/2$-szöröse. Így az élek hosszának fele $9\sqrt{2}$, ezt kell felmérni a csúcsok meghatározásához az G és H pontoktól az *AB* él e egyenesére és a *CD* él f egyenesére. Mivel $|\boldsymbol{v}_e| = 9\sqrt{2}$ éppen teljesül, közvetlenül adódnak az $A(4, -4, -6)$ és $B(-12, 10, 8)$ csúcsok a $\boldsymbol{g} \pm \boldsymbol{v}_e$ helyvektorokkal. Az f egyenes merőleges e-re és merőleges a *GH* normál-transzverzálisukra is, így az irányvektora $\boldsymbol{v}_f \parallel \boldsymbol{v}_e \times \boldsymbol{GH} \parallel (0, 1 -1)$. A $\boldsymbol{v}_f = (0, 9, -9)$ választással $|\boldsymbol{v}_f| = 9\sqrt{2}$ is fennáll, amiből a $C(10, 20, 0)$ és a $D(10, 2, 8)$ csúcsok is adódnak a $\boldsymbol{h} \pm \boldsymbol{v}_f$ helyvektorokkal.

3. Egy gömb alakú, $R = 5000$ km sugarú bolygó felszínén az A település koordinátái É.sz. 30°, Ny.h. 20°, a B településé pedig D.sz. 45°, K.h. 40°.

a) Határozzuk meg, hogy B-ből milyen irányban kell elindulni, hogy *légvonalban* A-ba, érjünk. Határozzuk meg az útvonal hosszát és az egyenlítővel közös D_0 pontjának a hosszúsági koordinátáját. (7p)

b) Az egyenlítőn egy – R-hez képest elhanyagolható szélességű – kelet felől nyugati irányba („igen gyorsan") áramló folyó található, amelyen átkelve $R\pi/6$ távolságba sodorja el a víz a csónakot. A bolygó felszínén B-ből A-ba tartva, a D_1 pontban kezdjük meg az átkelést a folyó déli partjáról és a D_2 pontban érjük el az északi partot ($D_1D_2 = R\pi/6$). Határozzuk meg D_1 hosszúsági koordinátáját úgy, hogy a BD_1, D_1D_2, D_2A főkörívekre a (hosszuk összegével kapcsolatban álló) $\cos(BD_1 / R) + \cos(D_1D_2 / R) + \cos(D_2A / R)$ összeg maximális legyen. (7p)

Megoldás: a) Jelölje S az északi sarkot. Akkor az *ABS* gömbháromszög szokásos jelöléseivel az $a = 135°$, $b = 60°$, $\sigma = 60°$, az $s = AB$ ívre pedig:

$\cos s = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \sigma = -0{,}047\,367\,172$; $s = 1{,}618\,181\,230 = 92°\,42'\,54''$;
$s^* = Rs = 8\,091$ km.

$\cos a = \cos b \cos s + \sin b \sin s \cos \alpha$; $\cos \alpha = -0{,}790\,035\,910$; $\alpha = 2{,}481\,663\,898 = 142°\,11'\,20''$, ebből az irányból érkezünk A-ba.

$\cos b = \cos a \cos s + \sin a \sin s \cos \beta$; $\cos \beta = 0{,}660\,480\,968$; $\beta = 0{,}\,849\,337\,175 = 48°\,39'\,48''$; az indulás iránya $360° - \beta = 311°\,20'\,12''$.

Jelölje rendre D, ill. E az útvonalnak, ill. A hosszúsági körének az egyenlítővel közös pontját. Ekkor az *AED* (E-nél) derékszögű háromszögben $AD = b_0 = 90° - b = 30°$, $\alpha_0 = 180° - \alpha = 37°\,48'\,40''$. Keressük az $a_0 = DE$ oldal hosszát és a D-nél lévő szöget.

$\cos \delta = -\cos \alpha_0 \cos 90° + \sin \alpha_0 \sin 90° \cos b_0 = \sin \alpha_0 \cos b_0 = 0{,}530\,926\,026$;
$\delta = 1{,}011\,103\,373 = 57°\,55'\,55''$, ez a D-nél lévő szög az útvonal és az egyenlítő hajlásszöge.

$\cos \alpha_0 = -\cos \delta \cos 90° + \sin \delta \sin 90° \cos a_0$; $\cos a_0 = \cos \alpha_0 / \sin \delta = 0{,}932\,285\,781$;
$a_0 = 0{,}370\,114\,925 = 21°\,12'\,22''$. D hosszúsági koordinátája tehát keleti: $a_0 - 20° = 1°\,12'\,22''$.

4. Tekintsük az egységsugarú gömbön azt az egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek befogói egységnyiek. **a)** Határozzuk meg az átfogó és a derékszögű csúcshoz tartozó súlyvonal hosszát. (Teljesül-e Thalész tétele?) (8p) **b)** A háromszög területének hányszorosa a körülírt kör területe. (6p)

Megoldás: **a)** A befogók hossza $a = 1$, az átfogón lévő szögek nagyságát pedig jelölje α. Így az átfogó c hosszára

$$\cos c = \cos 1 \cdot \cos 1 - \sin 1 \cdot \sin 1 \cdot \cos 90° = \cos^2 1 = 0{,}291\ 926\ 582,$$

amiből $c = 1{,}274\ 555\ 782$ és $c/2 = 0{,}637\ 277\ 891$.

Másrészt

$$\cos 1 = \cos 1 \cos c + \sin 1 \sin c \cos \alpha,$$

ebből $\cos \alpha = (\cos 1 - \cos 1 \cos c) / (\sin 1 \sin c) = (1/2) \sin 2 / \sin c = 0{,}475\ 354\ 822$,

így $\alpha = 1{,}075\ 429\ 038 = 61°\ 37'\ 3''$.

A kérdezett s súlyvonal egyenese két egybevágó derékszögű háromszögre bontja az eredeti háromszöget, amelyeknek átfogói éppen az eredeti befogók lesznek, az ezekre illeszkedő szögek pedig α és 45°.

$$\cos s = \cos 1 \cos (c/2) + \sin 1 \sin (c/2) \cos \alpha = 0{,}672\ 253\ 237,$$

ebből $s = 0{,}833\ 548\ 136$, ami nagyobb $c/2$-nél, így Thalész tétele nem igaz.

b) A kapott súlyvonal egyben az eredeti háromszög átfogójának oldalfelező merőlegese, így a körülírt kör O középpontját ebből metszi ki az egyik befogó felező merőlegese, amelynek talppontját jelölje M. Ekkor COM is egy derékszögű háromszög, amelynek $R = CO$ átfogója éppen az eredeti háromszög körülírt körének sugara, míg a CM befogó hossza 1/2 (C az eredeti háromszög derékszögű csúcsa). Az átfogón lévő egyik szög 45°, a másikat pedig jelölje φ.

$$\cos \varphi = -\cos 45° \cos 90° + \sin 45° \sin 90° \cos (1/2) = 0{,}620\ 544\ 581,$$

így $\varphi = 0{,}901\ 359\ 348 = 51°\ 38'\ 39''$.

$$\cos 90° = -\cos 45° \cos \varphi + \sin 45° \sin \varphi \cos R,$$

amiből $\cos R = 1 / (\mathrm{tg}\ 45° \ \mathrm{tg}\ \varphi) = 0{,}791\ 338\ 173$, és $R = 0{,}657\ 801\ 641$.

$T_o = 2\pi(1 - \cos R) = 1{,}311\ 060\ 928$, $T_\Delta = 90° + 2\alpha - \pi = 0{,}580\ 061\ 748$, így a kör területe $T_o / T_\Delta = 2{,}260\ 209\ 247$-szerese a háromszögének.