A3 beadandó feladatok I.

Beadási határidő: 2011. október 18. (kedd)

1*. Jelölje $\mathbb{R}(n)$ az $n\times n$-es valós mátrixok terét. Mi az (i) $\mathrm{tr}:\mathbb{R}(n)\to\mathbb{R}$, $B\mapsto \mathrm{tr}B$ és az (ii) $\det:\mathbb{R}(n)\to\mathbb{R}$, $B\mapsto \det B$ leképezések deriváltja?

2. Egy kétszer differenciálható $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvényre $\triangle f=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}f$ a skalár Laplace-operátor. Értelmezze az $\triangle'$ vektor Laplace-operátort és bizonyítsa be, hogy egy $\mathbf{u}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ vektormezőre $\triangle'\mathbf{u}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$.

3. (i) Számítsa ki az $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \mathbf{v}(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$ vektormező integrálját az alábbi $\gamma:[0,6\pi]\to\mathbb{R}^3$ görbék mentén:

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t\cos t\\ \mathrm{e}^t\sin t\\ \sqrt{2}\,\mathrm{e}^t\end{pmatrix},\qquad \gamma(t)=\begin{pmatrix}(5+\cos(t/3))\cos t\\ (5+\cos(t/3))\sin t\\ \sin(t/3)\end{pmatrix}.$$

Miket írnak le ezek a görbék?

(ii) Számítsa ki az

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}3t\\ 3t^2\\ 2t^3\end{pmatrix}$$

görbe $P(\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ és $Q(6,12,16)$ pontjait összekötő darabjának ívhosszát!

4. Forgassuk meg az

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+5 &=0\\ \qquad z &=0\end{cases}$$

egyenletű kört az y tengely körül! Írja föl az így előálló tórusz egyenletét $p(\phi,\psi)$ alakban ill. $F(x,y,z)=0$ formában! Hányadfokú polinom lesz F?

5. Számítsa ki az alábbi felületek felszíneit! Miféle felületek ezek?

$$\text{(i)}\quad p(\phi,\psi)=\begin{pmatrix}(R+r\cos\phi)\cos\psi\\ (R+r\cos\phi)\sin\psi\\ r\sin\phi\end{pmatrix},\quad (\phi,\psi)\in[0,2\pi]\times[0,2\pi],\quad R>r>0;$$

$$\text{(ii)}\quad p(\phi,u)=\begin{pmatrix}\cos\phi-u\sin\phi\\ \sin\phi+u\cos\phi\\ \phi+u\end{pmatrix},\quad \phi\in[0,2\pi],\quad u\in[0,1].$$

6. Tekintsük azt az S irányítható felületet, amit az $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ egyenletű kúpból vágnak ki a $z=0$ és a $z=1$ egyenletű síkok. Jelölje továbbá $\mathbf{r}$ az $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ pontba mutató $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ hosszú vektort. Integrálja a $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}=\mathrm{rot}(\cos(2\pi r)\mathbf{r})$ vektormezőt az S felületen!

7. Számítsa ki az $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}=r^{-3}\mathbf{r}$ vektormező integrálját az R sugarú, origó középpontú gömbfelszínre (i) közvetlen számolással (ii) a Gauss-tétel alkalmazásával. Mi az oka annak, hogy a két eredmény nem egyezik?

8. (*Whittaker–Watson formula*) Legyen $f:\mathbb{C}\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ olyan függvény, mely mindkét változójában folytonos, a komplex változó szerinti parciális deriváltja létezik és korlátos $\mathbb{C}\times[0,2\pi]$-n valamint a

$$h(x,y,z):=\int_0^{2\pi} f(z+\mathbf{i}x\cos\phi+\mathbf{i}y\sin\phi\,,\ \phi)\mathrm{d}\phi$$

integrál létezik. Mutassa meg, hogy az így kapott $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ függvény harmonikus, azaz kielégíti a $\triangle h=0$ egyenletet!