11. § A gömbháromszögtan elemei

1. A megadott adatok ismeretében számitsuk ki a háromszög hiányzó adatait:

a) $a = 60^\circ$, $b = 45^\circ$, $c = 90^\circ$;

b) $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 45^\circ$;

c) $a = 75^\circ$, $b = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$;

d) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $c = 135^\circ$;

e) $a = 30^\circ$, $b = 45^\circ$, $\alpha = 45^\circ$;

f) $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $a = 60^\circ$.

2. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = 60^\circ$, $b = 30^\circ$ és $c = 45^\circ$. Számitsuk ki az A csucspontot és a BC oldal A_1 felezőpontját összekötő főköriv hosszát!

3. Az $a = 30^\circ$, $b = 60^\circ$, $c = 60^\circ$ oldalu gömbháromszög B csucsából bocsássunk merőleges főkörivet a gömbháromszög AC oldalára. Milyen hosszu az igy adódó BB_1 főköriv?

4. Az ABC gömbháromszög oldalai adottak: $a = 30^\circ$, $b = 60^\circ$, $c = 60^\circ$. Számitsuk ki a β szöget felező BB_2 főköriv hosszát (B_2 az AC oldal pontja)!

5. Számitsuk ki a szabályos
   a) tetraéder,
   b) oktaéder,
   c) dodekaéder ,
   d) ikozaéder

lapszögét!

6. Az egységgömb középpontjából kiinduló $\underline{a}$ (3, -1, 2), $\underline{b}$ (6, 4, 3), $\underline{c}$ (1, 4, 2) vektorok kidöfik egy gömbháromszög csucsait. Határozzuk meg a gömbháromszög adatait!

7. Az ABC gömbháromszög oldalai ismertek, mégpedig $a = 45^\circ$, $b = 60^\circ$, $c = 90^\circ$. A CB oldalt a B csucsponton tul meghosszabbitjuk $BA_1 = 30^\circ$-kal. Milyen hosszu az AA_1 főköriv?

8. Az ABC gömbháromszögben $a = 60^\circ$, $b = 90^\circ$, $\gamma = 15^\circ$. Az ABC gömbháromszöghöz ugy illeszkedik az ACB' gömbháromszög, hogy az AC oldalon nyugvó szögek 45°-osak, és a két háromszögnek nincs közös belső pontja. Milyen hosszu a BB' főköriv?

9. Az ABC gömbháromszögben $a = 60^\circ$, $b = 45^\circ$, $c = 90^\circ$. A gömbháromszög AB oldalán áthaladó főkör által határolt, a gömbháromszöget tartalmazó félgömb pólusa legyen P. Számitsuk ki az ACP szöget és a PC főköriv hosszát!

10. Az ABC gömbháromszög oldalai legyenek $a = 90^\circ$, $b = 60^\circ$, $c = 120^\circ$. Az AB oldal C_1 pontjára $AC_1 = 60^\circ$, a BC oldal A_1 pontjára pedig $CA_1 = 30^\circ$ teljesüljön. Az AA_1 és a CC_1 ivek metszéspontja legyen P.
   a) Számitsuk ki a PC_1 főköriv hosszát!
   b) Milyen hosszu a PB főköriv?
   c) Számitsuk ki a CC_1A_1 szöget!

11. Ismertek a gömbháromszög a , b , c oldalai. Készitsünk tervet
   a) a gömbháromszögbe irt kör,
   b) a gömbháromszög köré irt kör

sugarának a meghatározására!

12. Az egységgömb középpontjából induljanak ki az $\underline{a}$ (1, -2, -2), $\underline{b}$ (2, 2, -1), $\underline{c}$ (2, -1, 2) vektorok. Számitsuk ki az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok által kidöfött gömbháromszög köré irt gömbi kör középpontjába mutató vektor koordinátáit!

13. Az ABC gömbháromszög megfelelő csucspontjaiba mutatnak a gömb középpontjából induló és jobbrendszert alkotó $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egységvektorok. Fejezzük ki az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok segitségével a gömbháromszög köré irt kör középpontjába mutató $\underline{x}$ vektort.

14. A gömb középpontjából kiinduló $\underline{a}$ (1, 0, 0), $\underline{b}$ (1, 1, 1), $\underline{c}$ (1, 1, 0) vektorok gömbháromszöget határoznak meg. Milyen messze van (főkörivben mérve) a gömbháromszög A csucsa a BC oldaltól?

15. Legyen a gömbháromszögben $\gamma = 90^\circ$. Bizonyitsuk be a következő összefüggéseket:

a) $\sin a = \sin\alpha \, \sin c$;

b) $\cos\alpha = \sin\beta \, \cos a$; $\cos\beta = \sin\alpha \, \cos b$;

c) $\cos c = \cos a \, \cos b$;

d) $\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \, \operatorname{ctg}\beta$.

16. Ha egy gömbháromszögnek pontosan egy 90°-os oldala van, akkor hány 90°-nál nagyobb szöge lehet?

17. Bizonyitsuk be, hogy az egyenlő oldalu gömbháromszögben

$$2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{a}{2} = 1 ,$$

ahol a a gömbháromszög oldalát, α pedig a szögét jelenti!

18. Egy gömbháromszög oldalai s igy a szögei is egyenlők, nagyságuk a ill. α .
   a) Milyen összefüggés van $\cos a$ és $\cos\alpha$ között?
   b) Mekkora a ill. α , ha egymásnak pótszögei?

19. Az ABC gömbháromszög A csucsából a szembenfekvő oldalra bocsátott merőleges főköriv ezt az oldalt két megadott részre (p és q) bontja fel. Adott még: α . Számitsuk ki e gömbháromszög többi oldalát és szögét!

1. a) Alkalmazzuk az oldalakra vonatkozó koszinusztételt!
$\alpha = 45^\circ$; $\beta = \arccos\frac{\sqrt2}{\sqrt3} \approx 35,28^\circ$; $\gamma = \arccos\left(-\frac{\sqrt3}{3}\right) \approx 125,26^\circ$.

b) A szögekre vonatkozó koszinusztételből: $a = c = \arccos\frac{\sqrt3}{3} \approx$ $\approx 54,74^\circ$; $b = 90^\circ$.

c) Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján: $c \approx 43,88^\circ$; $\alpha \approx 99,74^\circ$; $\beta \approx 62,10^\circ$.

d) A szögekre vonatkozó koszinusztételből: $\gamma \approx 106,28^\circ$; $a \approx 140,35^\circ$; $b \approx 39,65^\circ$.

e) A szinusztétel szerint $\beta = 90^\circ$. Az oldalakra és a szögekre vonatkozó koszinusztételek szerint

$$\cos c = \cos 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ \cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = -\cos 45^\circ \cos 90^\circ + \sin 45^\circ \sin 90^\circ \cos c,$$

s a felirt egyenletrendszert megoldva $c = \arccos\frac{\sqrt6}{3} \approx 35,28^\circ$ és $\gamma = \arccos\frac{\sqrt3}{3} \approx 54,74^\circ$.

f) A szinusztételből $\sin b = \frac{\sqrt2}{2}$, s igy $b = 45^\circ$ vagy $b = 135^\circ$, de mivel $\alpha > \beta$, azért $a > b$, tehát a gömbháromszög b oldala 45°. Végül a

$$\cos c = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt3}{2}\,\frac{\sqrt2}{2}\cos\gamma,$$

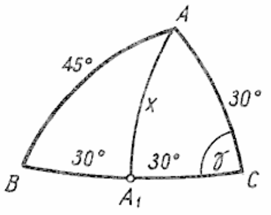
$$\cos\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt3}{2}\,\frac{\sqrt2}{2}\cos c$$

egyenletrendszer megoldásából $c = \gamma = \arccos\frac{\sqrt2}{4-\sqrt6} \approx 24,2^\circ$.

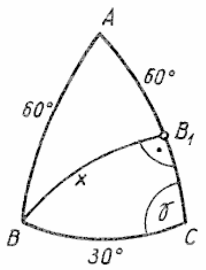
2. Az ABC gömbháromszögből (195. ábra) $\cos\gamma = \frac{2\sqrt6-3}{3}$, az AA_1C gömbháromszögben ha $AA_1 = x$, akkor

$$\cos x = \cos 30^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \sin 30^\circ \cos\gamma = \frac{3+\sqrt6}{6},$$

s igy $x \approx 24,74^\circ$.



195. ábra



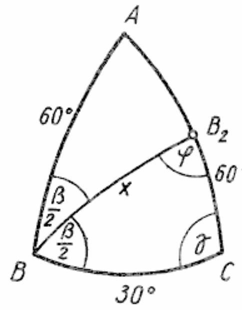
196. ábra

3. Az ABC gömbháromszögben (196. ábra) $\cos\gamma = \frac{2\sqrt3-3}{3}$, s igy a BB_1C derékszögü gömbháromszögben ha $BB_1 = x$, a szinusztétel szerint

$$\sin x = \sin 30^\circ \sin\gamma,$$

amelyből $x \approx 29,60^\circ$.

4. Az ABC gömbháromszögben (197. ábra) $\beta = \gamma \approx 81,10^\circ$, mert a gömbháromszög egyenlő szárú. A BB_2C gömbháromszögben



197. ábra

$$\cos\varphi \approx -\cos 40,55^\circ \cos 81,10^\circ + \sin 40,55^\circ \sin 81,10^\circ \cos 30^\circ \approx 0,4386,$$

amelyből $\varphi \approx 63,99^\circ$.

Végül ha a BB_2C gömbháromszögre a szinusztételt alkalmazzuk, akkor $BB_2 \approx 33,35^\circ$.

5. Legyen a gömb középpontja a szabályos poliéder egy csucsa. A kiszemelt csucspontból kiinduló élek közül ha hármat tekintünk, azok a gömbön meghatároznak egy gömbháromszöget. Ennek egyik szöge megadja a szabályos poliéder α lapszögét.

a) Szabályos tetraéder esetében igy egy olyan gömbháromszöghöz jutunk, amelynek oldalai 60°, 60°, 60°. Ennek a gömbháromszögnek a szögei adják a szabályos tetraéder lapszögét. $\alpha \approx 70,53^\circ$.

b) Oktaéder esetében egy olyan gömbháromszöget kapunk, amelynek oldalai 60°, 60° és 90°. A 90°-os oldallal szemköztes α szög egyenlő az oktaéder lapszögével. $\alpha \approx 109,47^\circ$.

c) Dodekaéder esetében a gömbháromszög oldalai 108°, 108°, 108°, tehát $\alpha \approx 116,56^\circ$.

d) Ikozaéder esetében tekintsük azt a gömbháromszöget, amelynek oldalai 60°, 60° és 108°. A 108°-os oldallal szemköztes szög szolgáltatja az α lapszöget. $\alpha \approx 138,18^\circ$.

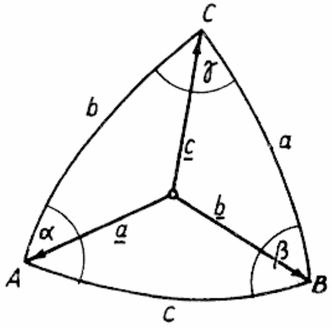
6. A gömbháromszög oldalait az $(\underline{a}, \underline{b})$, $(\underline{b}, \underline{c})$, $(\underline{c}, \underline{a})$, szögek mérik (198. ábra). Pl.

$$\cos a = \cos(\underline{b}, \underline{c}) = \frac{\underline{b}\,\underline{c}}{|\underline{b}|\,|\underline{c}|} = \frac{28}{\sqrt{61}\,\sqrt{21}},$$

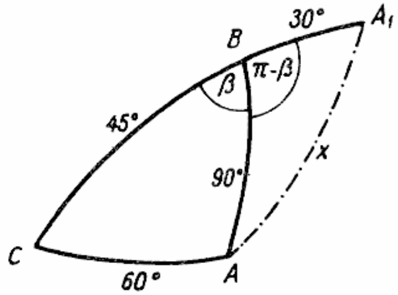
s igy $a \approx 38,52^\circ$.

Hasonlóan adódik, hogy $b = (\underline{c}, \underline{a}) \approx 79,92^\circ$ és $c = (\underline{a}, \underline{b}) \approx 46,81^\circ$.

Mivel $\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} > 0$, azért $\pi - \alpha = (\underline{c}\times\underline{a},\ \underline{a}\times\underline{b})$, $\pi - \beta = (\underline{a}\times\underline{b},\ \underline{b}\times\underline{c})$, $\pi - \gamma = (\underline{b}\times\underline{c},\ \underline{c}\times\underline{a})$.
$\underline{a}\times\underline{b}$ $(-11, 3, 18)$, $\underline{b}\times\underline{c}$ $(-4, -9, 20)$ és $\underline{c}\times\underline{a}$ $(10, 4, -13)$.
$\alpha \approx 22,63^\circ$, $\beta \approx 142,50^\circ$, $\gamma \approx 26,78^\circ$.



198. ábra



199. ábra

7. Az ABC gömbháromszögben $\beta = 45^\circ$, s igy az ABA_1 gömbháromszögben (199. ábra)

$$\cos x = \cos 30^\circ \cos 90^\circ + \sin 30^\circ \sin 90^\circ \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

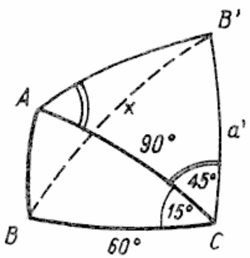
amelyből $x \approx 110,7^\circ$.

8. Az ACB' gömbháromszögben (200. ábra) $AB'C\sphericalangle = 120^\circ$ és ha $CB' = a'$, akkor $\sin a' = \frac{\sqrt{6}}{3}$ és $\cos a' = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

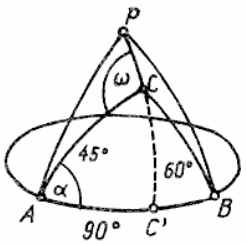
Ha $BB' = x$, akkor a $BB'C$ gömbháromszögben

$$\cos x = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{12} \approx 0,6422$$

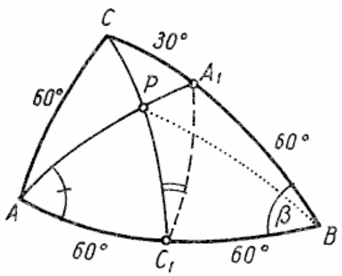
és igy $x \approx 50,04^\circ$.



200. ábra



201. ábra



202. ábra

9. Az ABC gömbháromszögben (201. ábra) $\alpha = 45^\circ$, a C csucsból az AB-re bocsátott CC' merőleges hossza pedig 30°, s igy $PC = 60^\circ$. Ha $ACP\sphericalangle = \omega$, akkor az ACP gömbháromszögből az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján $\cos\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ s igy $ACP\sphericalangle = \omega \approx 125,26^\circ$.

10. a) Az ABC gömbháromszögből (202. ábra) $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Az ABA_1 gömbháromszögből $AA_1 \approx 79,4^\circ$, $A_1AB\sphericalangle \approx 45,99^\circ$.
A CC_1B gömbháromszögből $CC_1 = 60^\circ$, $CC_1B\sphericalangle \approx 109,47^\circ$.
Végül az AC_1P gömbháromszögben $AC_1P\sphericalangle = 180^\circ - CC_1B\sphericalangle \approx 70,53^\circ$, $APC_1\sphericalangle \approx 83,83^\circ$ és $PC_1 \approx 38,79^\circ$.

b) A PC_1B gömbháromszögből (202. ábra) $PB \approx 77,94^\circ$.

c) Az A_1C_1B gömbháromszögből (202. ábra) $A_1C_1 \approx 46,92^\circ$.

Végül az A_1C_1C gömbháromszögből $CC_1A_1\sphericalangle \approx 33,95^\circ$.

11. a) A beirt kör középpontja legyen O, az oldalakon az érintési pontok pedig rendre A_1, B_1, C_1 (203. ábra). Belátható, hogy az O pont a gömbháromszög szögeit felező főkörivek metszéspontja.

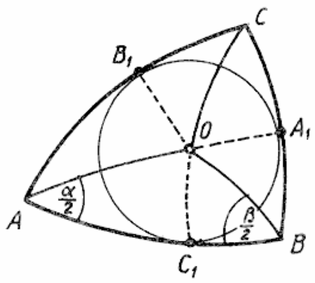
A megoldás tervezete:

a_1) Az ABC gömbháromszögből az oldalakra vonatkozó koszinusztétellel az α és β szögek kiszámithatók.

a_2) Az ABO gömbháromszögből c, $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$ birtokában az $AOB\sphericalangle$ és az AO oldal a szögekre vonatkozó koszinusztétellel számitható ki.

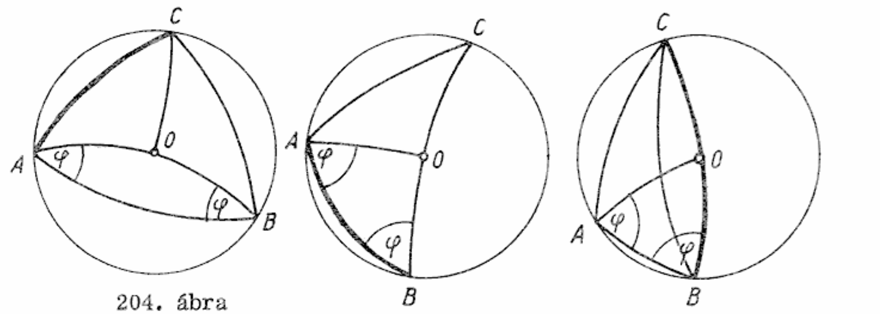
a_3) Az AOC_1 derékszögü gömbháromszögből szinusztétellel megkapható a beirt kör OC_1 sugara.

b) A körülirt kör O középpontja a gömbháromszög oldalait merőlegesen felező főkörök metszéspontja (204. ábra).



203. ábra

A megoldás tervezete:



204. ábra

Legyen $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = \varphi$ és $OA = OB = OC = x$.

Ha az OAB és az OBC egyenlő szárú gömbháromszögekre felirjuk az oldalakra vonatkozó koszinusztételt, akkor

$$\cos x = \cos x \cos c + \sin x \sin c \cos\varphi,$$

$$\cos x = \cos x \cos a + \sin x \sin a \cos(\beta-\varphi).$$

Mivel $\cos(\beta-\varphi)=\cos(\varphi-\beta)$, azért a felirt egyenletrendszer helyes akkor is, ha az O pont a gömbháromszögön kivül van. Ha az egyenletrendszer megoldása során $\varphi=\beta$, akkor O rajta van a gömbháromszög BC oldalán.

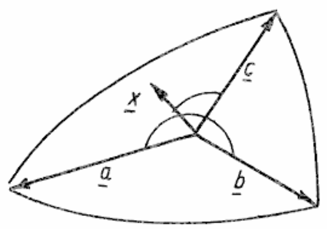
12. A keresett $\underline{x}$ vektor az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektorok mindegyikével ugyanakkora szöget zár be (L. a 10.9 feladatot!).

$$\underline{x}\left(\frac{5}{\sqrt{27}},\ -\frac{1}{\sqrt{27}},\ -\frac{1}{\sqrt{27}}\right).$$

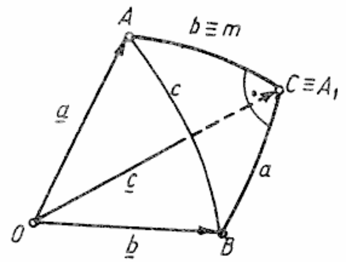
13. A keresett $\underline{x}$ vektor merőleges a $\underline{b}-\underline{a}$, és a $\underline{c}-\underline{a}$ vektorokra (205. ábra), tehát $\underline{x}\parallel(\underline{b}-\underline{a})\times(\underline{c}-\underline{a})$. Ez alapján (mivel $\underline{x}$ egységvektor)

$$\underline{x} = \frac{\underline{a}\times\underline{b}+\underline{b}\times\underline{c}+\underline{c}\times\underline{a}}{|\underline{a}\times\underline{b}+\underline{b}\times\underline{c}+\underline{c}\times\underline{a}|}.$$

14. Mivel $\cos a=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos b=\sin b=\frac{\sqrt{2}}{2}$,



205. ábra



206. ábra

$\cos c=\frac{\sqrt{3}}{3}$, azért az oldalakra vonatkozó koszinusztétel alapján $\gamma=90^\circ$. Végül az ABC gömbháromszögben (206. ábra) a keresett gömbi távolság $AA_1=m$, ahol $A_1\equiv C$, s igy $AA_1=45^\circ$.

15. a) Szinusztétel szerint nyilvánvaló az állítás.

b) A szögekre vonatkozó koszinusztételből közvetlenül adódik a felirt összefüggés.

c) Irjuk fel a c oldalra vonatkozó koszinusztételt!

d) A b) alapján

$$\cos a=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad \text{és} \quad \cos b=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

s végül c) alapján

$$\cos c=\cos a\cos b=\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha\ \mathrm{ctg}\,\beta.$$

16. Legyen $c=90^\circ$. Ekkor $\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta$, azaz

$$\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma=0. \qquad (1)$$

a) Ha (1)-ben $\cos\alpha\cos\beta=0$ és $\cos\gamma=0$ volna, akkor $\gamma=90^\circ$ lenne és az α, β szögek közül legalább egy 90° lenne. Ekkor c és a, b közül legalább egy 90° lenne, ami feltevésünk szerint lehetetlen.

b) Az (1)-ben felirt egyenlőségben a tagok legyenek zérustól különbözők. Ekkor az egyenlőség akkor teljesül csak, ha $\cos\alpha\cos\beta$ és $\cos\gamma$ ellenkező előjelü.

b_1) Legyen $\cos\gamma>0$ és $\cos\alpha\cos\beta<0$. Ebben az esetben csak egy szög lehet nagyobb 90°-nál.

b_2) Ha $\cos\gamma<0$ és $\cos\alpha\cos\beta>0$, akkor vagy csak a γ vagy pedig az α, β, γ szögek mindegyike nagyobb 90°-nál.

17. Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel szerint

$$\cos a=\cos^2 a+\sin^2 a\cos\alpha=1-\sin^2 a+\sin^2 a\cos\alpha=1+\sin^2 a(\cos\alpha-1),$$

amelyből

$$1-\cos a=(1-\cos\alpha)\sin^2 a.$$

Ha a félszögekre vonatkozó összefüggéseket is felhasználjuk, akkor

$$2\sin^2\frac{a}{2}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}\,4\sin^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a}{2},$$

amelyből

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{a}{2}=1,$$

azaz valóban

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{a}{2}=1.$$

18. a) Az oldalakra vonatkozó koszinusztétel szerint

$$\cos a=\cos^2 a+\sin^2 a\cos\alpha=\cos^2 a+(1-\cos^2 a)\cos\alpha,$$

amelyből

$$\cos\alpha=\frac{(1-\cos a)\cos a}{1-\cos^2 a}=\frac{\cos a}{1+\cos a}. \qquad (1)$$

b) Ha $a+\alpha=90^\circ$, akkor $\cos\alpha=\sin a$, s igy (1) alapján

$$\sin a(1+\cos a)=\cos a,$$

$$\sin a\cos a=\cos a-\sin a.$$

Négyzetre emelés és rendezés után

$$\sin^2 2a + 4\sin 2a - 4 = 0,$$

amelyből

$$\sin 2a = -2 + 2\sqrt{2},$$

s igy $a \approx 27,97^\circ$, és $\alpha \approx 62,03^\circ$

a) Ha (1)-ben $\cos\alpha\cos\beta = 0$ és $\cos\gamma = 0$ volna, akkor $\gamma = 90^\circ$ lenne és az α, β szögek közül legalább egy 90° lenne. Ekkor c és a, b közül legalább egy 90° lenne, ami feltevésünk szerint lehetetlen.

b) Az (1)-ben felirt egyenlőségben a tagok legyenek zérustól különbözők. Ekkor az egyenlőség akkor teljesül csak, ha $\cos\alpha \cos\beta$ és $\cos\gamma$ ellenkező előjelü.

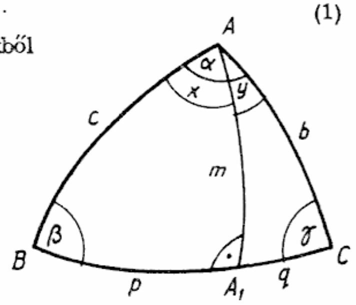
19. A 207. ábra jelöléseivel

$$x + y = \alpha. \qquad (1)$$

Az ABA_1 és az ACA_1 gömbháromszögekből a szinusztétel szerint

$$\sin m = \sin p \frac{\sin\beta}{\sin x},$$

$$\sin m = \sin q \frac{\sin\gamma}{\sin y}. \qquad (2)$$



207. ábra

A 11.15/b feladat szerint

$$\sin\beta = \frac{\cos x}{\cos p}, \quad \sin\gamma = \frac{\cos y}{\cos q},$$

s igy (2)-ből

$$\sin m = \operatorname{tg} p \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} q \operatorname{ctg} y. \qquad (3)$$

(3)-ból

$$\operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} p : \operatorname{tg} q,$$

$$(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) : (\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) = (\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q) : (\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q),$$

$$\sin(x+y) : \sin(x-y) = \sin(p+q) : \sin(p-q),$$

$$\sin(x-y) = \frac{\sin(p-q)}{\sin(p+q)} \sin(x+y) = \frac{\sin(p-q)}{\sin a} \sin\alpha,$$

amelyből

$$x - y = \delta \qquad (4)$$

kiszámitható.

(1) és (4) alapján x és y kiszámitható, a gömbháromszög oldalai és szögei pedig az ABA_1 és az ACA_1 derékszögü gömbháromszögekből adódnak.