NÉV: .... NEPTUN-KÓD: .... SZAK: ....

ELŐADÓ: Pete Gábor

Valószínűségszámítás vizsgakurzus ZH1, 2014. márc. 17.
Munkaidő: 90 perc. Kalkulátor nem használható. Összpontszám: 90 pont.
Megoldások

1. Béla, két másik úr, és két hölgy egy sorban állnak teljesen véletlenszerű sorrendben. Ez a feladat arról szól, hogy Bélának lenni nem ugyanaz, mint az utolsó úrnak lenni a sorban a háromból.

   (a) (5 pont) Mi a valószínűsége, hogy Béla az i-dik a sorban, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

   (b) (5 pont) Béla várhatóan hanyadik a sorban?

   (c) (5 pont) Az a)-ban szereplő események segítségével határozzuk meg annak valószínűségét, hogy Béla előtt közvetlenül egy úr áll.

   (d) (5 pont) Mi a valószínűsége, hogy az utolsó úr épp az i-dik a sorban, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$?

   (e) (5 pont) Az utolsó úr várhatóan hanyadik a sorban?

   (f) (5 pont) A d)-ben szereplő események segítségével határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az utolsó úr előtt közvetlenül egy úr áll.

   (g) (3 pont) Mi a valószínűsége, hogy Béla az utolsó úr a sorban?

   Megoldás. Természetesen Béla is úr. Egyrészt mi más lenne, másrészt különben a "másik két úr"-ban a "másik" értelmetlen volna, harmadrészt mondja a feladat második mondata, hogy három úr van. Minden más értelmezés nyilvánvaló súlyos hiba, de ennek ellenére próbáltam minimális pontszámot levonni.

   (a) A szimmetria miatt (akár az emberek között, akár a helyek között), $\mathbb{P}[B = i] = 1/5$, $i = 1, 2, \dots, 5$.

   (b) $(1 + \cdots + 5)/3 = 3$.

   (c) Ha $B = 1$, akkor nem állhat előtte úr. Bármely más esetben, a két úr és két hölgy közül, a szimmetria miatt, $1/2$-del áll úr. Tehát $1/5 \cdot 0 + 4/5 \cdot 1/2 = 2/5$ a válasz.

   (d) $\mathbb{P}[U = 1, 2] = 0$. $\mathbb{P}[U = 3] = 3!2!/5! = 1/10$, hiszen $U_1U_2U_3H_1H_2$ alakúak a kedvező esetek. $\mathbb{P}[U = 4] = 3 \cdot 3!2!/5! = 3/10$, mert az utolsó úr előtti egy hölgy helyét is ki kell választani. $\mathbb{P}[U = 5] = 6 \cdot 3!2!/5! = 6/10$, mert két hölgy helyét kell kiválasztani a négyből. Az összeg tényleg 1.

   (e) $3 \cdot 1/10 + 4 \cdot 3/10 + 5 \cdot 6/10 = 4.5$.

   (f) Föltéve, hogy $U = 3$, a feltételes valószínűség 1. Föltéve, hogy $U = 4$, a feltételes valószínűség 2/3. Föltéve, hogy $U = 5$, a feltételes valószínűség 1/2. Tehát $1 \cdot 1/10 + 2/3 \cdot 3/10 + 1/2 \cdot 6/10 = 3/5$ a válasz.

   (g) A három úr közül, a szimmetria miatt, $1/3$. (Ha valaki lát öt embert egy sorban, megkérdezik tőle, hogy ki az utolsó férfi a sorban, és azt válaszolja, hogy senki, hisz az utolsó ember a sorban egy nő, az magára vessen.)

2. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az emberek szemének színét két gén határozza meg, melyek egymástól függetlenül lehetnek B vagy k bizonyos valószínűséggel (más eset nincs). Így tehát minden emberben a következő párok (genotípusok) valamelyike található meg: BB, Bk, kB, kk. Ezek közül az utolsó esetben az egyén kékszemű, az első három esetben barna szemű. Öröklésnél mindkét szülő függetlenül és egyenlő valószínűséggel adja tovább a két génje közül az egyiket.

   (a) (9 pont) Valamely országban az emberek $1/9$-e kékszemű. Mi az egyes genotípusok aránya?

   (b) (9 pont) Egy ismerős anyukának kék szeme van. Van továbbá egy férje és egy gyermeke, akiket nem ismerünk. Mi a valószínűsége, hogy a gyermek kékszemű?

(c) (9 pont) Később találkozunk a gyermekkel is, és kiderül, hogy kékszemű. Most mi a valószínűsége, hogy a gyermek apja kékszemű?

Megoldás. (a) Ha a kék gének aránya a populációban p, akkor a kékszeműek (a kk genotípus) aránya p^2, a kB, Bk, BB genotípusok aránya pedig rendre $p(1-p)$, $(1-p)p$, $(1-p)^2$. A feladat szerint $p^2 = 1/9$, tehát $p = 1/3$, és a genotípusok aránya $1/9$, $2/9$, $2/9$, $4/9$.

Fölmerülhet a lelkiismeretes olvasóban, hogy itt egy dinamikus feladat van, időben változnak a generációk, jogos-e mégis állandó p génarányról beszélni. Hát, ha egy generációban igaz a p, akkor a következő generációban egy véletlen gyerek $p^2 + 1/2p(1-p) + 1/2(1-p)p + 0(1-p)^2$-tel kap k gént, mindkét szülőjétől függetlenül, ami pont megint p, mindkét génjére, úgyhogy fönnmarad az arány.

(b) Egyesek nem gondolták, hogy az (a) rész folytatásáról van szó, és így az $1/9$-es infót ignorálták. Hogy ehelyett miért gondolták, hogy az 1/4 jó lesz, fogalmam sincs. Miért nem bármi más, mondjuk 1/100? Ha valaki p^2 paraméterrel csinálta volna, az tökéletes lett volna, de az önkényes $p = 1/2$ egy súlyos hiba, amiért azért próbáltam minimális pontot levonni.

Szóval, ha egyszerűen $\mathbb{P}[\cdot]$-vel jelöljük az $\{\mathsf{Anya} = kk\}$ feltétel melleti valószínűséget, akkor

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk] &= \mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk, \mathsf{Apa} = kk] + \mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk, \mathsf{Apa} = Bk] \\ &\quad + \mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk, \mathsf{Apa} = kB] + \mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk, \mathsf{Apa} = BB] \\ &= 1 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} + 0 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}\,.\end{aligned}$$

(c) Bayes szabály szerint:

$$\mathbb{P}[\mathsf{Apa} = kk \mid \mathsf{Gy} = kk] = \frac{\mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk, \mathsf{Apa} = kk]}{\mathbb{P}[\mathsf{Gy} = kk]} = \frac{1/9}{1/3} = 1/3\,.$$

3. (30 pont) Egy lóversenyen 9 ló indul, számuk 1, 2, . . . , 9. Egy bookmakernél arra lehet fogadni, hogy az első három helyezett számait hárommal osztva a maradék nem egyezik meg a helyezéssel. (Tehát az első helyen nem végezhet az 1, 4, 7 számú ló, se a második helyen a 2, 5, 8 számú ló, se a harmadik helyen a 3, 6, 9 számú.) A feltett tét hányszorosát fizesse vissza, ha várhatóan 10% haszonnal akar dolgozni? Tegyük fel, hogy a lovak teljesen véletlenszerű sorrendben futnak be. (*Tipp: Szita formula.*)

Megoldás. Legyen E_1 az az esemény, hogy első helyre az $1, 4, 7$ lovak egyike fut be, és E_2, E_3 hasonlóan. Tehát mi nyerünk, ha $E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c$ következik be (a "se" szócska metszetet jelöl a magyar nyelvben, nem uniót). Nyilván $\mathbb{P}[E_1] = 1/3$. Viszont $\mathbb{P}[E_1^c \cap E_2^c]$ sem számolható már egyszerűen, miközben világos, hogy $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] = 3/9 \cdot 3/8$ és $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap E_3] = 3/9 \cdot 3/8 \cdot 3/7$. Tehát szitázzunk: $\mathbb{P}[E_1^c \cap E_2^c \cap E_3^c] = 1 - \mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3]$, és

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[E_1 \cup E_2 \cup E_3] &= \binom{3}{1}\mathbb{P}[E_1] - \binom{3}{2}\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] + \binom{3}{3}\mathbb{P}[E_1 \cap E_2 \cap E_3] \\ &= 1 - 3/8 + 3/56 = 38/56 = 19/28\,.\end{aligned}$$

Azaz mi 9/28 valószínűséggel nyerünk. Ha minden föltett egységért x-et ad a bookmaker nyerés esetén, akkor az ő átlagos nyeresége $(1-x) - x9/28$, aminek 0.1-nek kellene lennie, tehát $9/10 = x9/14$, tehát $x = 7/5$.