Véletlen struktúrák, ELTE, 2014 tavasz

Pete Gábor

http://www.math.bme.hu/~gabor

Hely és idő: márc 10-től hétfő-keddenkként 8:30-10, Déli tömb, 7-102.

1 Március 10

1.1 Ramsey számok

Fölső becslés: $R(k,\ell) \le R(k-1,\ell) + R(k,\ell-1)$. Ebből ugye azt kapjuk, hogy

$$R(k,\ell) \le \binom{k+\ell-2}{k-1} \quad \text{és} \quad R(k,k) \le C\frac{4^k}{\sqrt{k}}. \tag{1.1}$$

Itt ugye a $\binom{2k}{k}/4^k \asymp 1/\sqrt{k}$ nagyságrendet az 1-dimenziós bolyongásra vonatkozó lokális CHT-ből rögtön lehet látni, ha valaki nem emlékezne a Stirling-formulára.

Alsó becslés [AS08, §3.1]: minden n-re és p-re,

$$R(k,\ell) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{\ell}(1-p)^{\binom{\ell}{2}}. \tag{1.2}$$

$$R(k,C_{\le\ell}) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \sum_{j=3}^{\ell} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{2}(1-p)^j. \tag{1.3}$$

Az elsőben, $k=\ell$ esetén $p=1/2$ a logikus választás, és $R(k,k) \ge c2^{k/2}k$-et kapunk. Ez messze van (1.1)-től, de ez van, lényegesen jobb nem ismert egyik oldalról sem.

Ha ℓ pici fix, és k nagy, akkor persze $1-p$-t kicsinek érdemes választani. Valóban, tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz, ha $\delta > 0$ elég kicsi, akkor $1-p = n^{-\frac{2}{\ell}-\delta}$ és $n = k^{\frac{\ell}{2}-\epsilon}$ választással az (1.2)-beli második kivonandó tag $o(n)$, továbbá $1-p = k^{-1+\tilde\epsilon}$, $\tilde\epsilon > 0$ miatt az első kivonandó tag $o(1)$. Tehát $R(k,\ell) \ge k^{\frac{\ell}{2}+o(1)}$. Az a sejtés, hogy $k^{\ell-1+o(1)}$ az igazság. Ez $\ell=3$-ra ismert, fogunk rá látni egy Lovász Lokális Lemmás bizonyítást [Spencer 1977]; sőt, a pontos $o(1)$ tag is ismert: $R(k,3) \asymp k^2/\log k$, ahol [Ajtai-Komlós-Szemerédi 1980] a fölső, és [Kim 1995] az alsó becslés.

Hasonlóképpen, tetszőleges $\epsilon > 0$-hoz, ha $\delta > 0$ elég kicsi, akkor $p = 1 - n^{-\frac{\ell-1}{\ell}-\delta}$ és $n = k^{\frac{\ell}{\ell-1}-\epsilon}$ választással az (1.3)-beli második kivonandó tag $o(n)$, továbbá $1-p = k^{-1+\tilde\epsilon}$, $\tilde\epsilon > 0$ miatt az első kivonandó tag $o(1)$. Tehát $R(k,C_{\le\ell}) \ge k^{\frac{\ell}{\ell-1}+o(1)}$. Ez azért érdekes, mert ezek szerint léteznek G gráfok n csúcson

$$\mathsf{girth}(G) > \ell \quad \text{és} \quad \chi(G) \ge \frac{n}{\alpha(G)} \ge n^{\frac{1}{\ell}+o(1)}$$

paraméterekkel, tehát a kromatikus szám egyáltalán nem lokális: minden pont egy nagy környezete 2-színezhető, és mégis χ nagy. [AS08, Lens 3].

1.2 Összegmentes halmazok

Ha $B \subset \mathbb{Z}$, $|B| = n$, akkor létezik $A \subseteq B$, $|A| > n/3$, hogy $(A + A) \cap A = \emptyset$.

Az alapötlet az, hogy tegyük eltolásinvariánssá a problémát, hogy a véletlen részhalmazunk várható mérete számolható legyen. Lásd [AS08, §1.4].

2 Március 11

2.1 Független halmazok konstruálása gráfokban

Ha n csúcson d az átlagfokszám, akkor primitív ötlettel $\alpha(G) \geq np - \frac{nd}{2}p^2$, ami $p = 1/d$ választással $\alpha(G) \geq \frac{n}{2d}$-t ad. [AS08, §3.2]

Egy fokkal kevésbé primitíven, ha $S := \{v \in V : U_v > U_w \ \forall v \sim w\}$, ahol U_v iid $\mathsf{Unif}[0, 1]$ címkék, akkor ez egy független halmaz, és $\mathbf{E}|S| = \sum_{v \in V} \frac{1}{d_v+1}$, így létezik ekkora S. Ebből könnyen következik az $\mathsf{ext}(n, K_k)$-ról szóló Turán-tétel. [AS08, Lens 6]

Megjegyzés: Legyen $G_{n,d}$ az uniform véletlen d-reguláris gráf n csúcson. Ismert, hogy $\alpha_d := \lim_n \alpha(G_{n,d})/n$ létezik [Bayati-Gamarnik-Tetali 2010], szigorúan kisebb 1/2-nél minden $d \geq 3$-ra [Bollobás 1981], nagy d-re $\alpha_d \sim 2(\log d)/d$ [Frieze-Łuczak 1992], és $0.4361 < \alpha_3 < 0.45537$ [Csóka-Gerencsér-Harangi-Virág 2013]. Utóbbi alapötlete, hogy egy iid mező lokális maximumai helyett valami jobb mezőt kellene venni, pld a bolyongás Markov-operátorának egy sajátvektorát, látunk majd még ilyesmit.

2.2 Hipergráfok kétszínezhetősége

Hipergráfok csúcsait akarjuk jólszínezni, hogy ne legyen monokromatikus él. Legyen $m(n)$ a legkisebb szám, amire létezik n-uniform nem-2-színezhető hipergráf ennyi éllel. Tétel: $2^{n-1} < m(n) < Cn^2 2^n$. Mindkét korlátot valszám módszerrel bizonyítottuk [AS08, §1.3].

2.3 Hamilton-utak tournamentekben

Rédei tétele, hogy minden tournamentben létezik Hamilton-út: $P(T) \geq 1$. Lehet, hogy csak egy: pld egy lineáris rendezést leíró tournamentben. Mennyi lehet legfeljebb? Legyen ez $P(n) := \max\{P(T) : |V(T)| = n\}$. Tétel [Szele 1943, Alon 1990]: $n!/2^{n-1} < m(n) < n!/(2 - o(1))^n$.

Az alsó becslés az első megjelenése a véletlen módszernek [AS08, §2.1]. A felső becslést Brégman tételének [AS08, Lens 2] segítségével csináltuk: ha $A = (a_{ij})$ egy 0-1-mátrix, $r_i := \sum_{j=1}^n a_{ij}$ sorösszegekkel, akkor

$$\mathsf{per}(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \leq \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i} .$$

Az a kapcsolat, hogy ha A_T a tournament adjacencia mátrixa, akkor $\mathsf{per}(A_T)$ pont az 1-ki-1-befokú feszítőrészgráfok száma, ami persze fölső becslés a Hamilton-körök számára, ami meg nincs messze a Hamilton utak számától. Ezután kell még egy

$$\max\left\{ \prod_{i=1}^n (r_i!)^{1/r_i} : \sum_{i=1}^n r_i = \binom{n}{2} \right\}$$

optimalizálás, Taylor sorfejtéssel, Stirling formulával, ilyesmi, ezt inkább hagytuk [AS08, Lens 4].

3 Március 17

3.1 $0-1$ mátrix permanensének becslése

Brégman tételének valszámos bizonyítása [AS08, Lens 2].

3.2 A prímek véletlenszerűségéről

Hardy-Ramanujan (1920), Turán (1934), Erdős-Kac (1940). Ha $x \in \mathbb{N}$-re $\nu(x)$ jelöli az x különböző prímtényezőinek számát, akkor a következő CHT igaz [AS08, §4.2]:

$$\frac{1}{n}\#\left\{1 \leq x \leq n : \frac{\nu(x) - \ln\ln n}{\sqrt{\ln\ln n}} < \lambda\right\} \to \Phi(\lambda)\,,$$

ahogy $n \to \infty$, ahol $\Phi(z)$ a standard normális eloszlásfüggvénye. Egy gyengébb verzióhoz második momentumokat számoltunk és a Csebisev-egyenlőtlenséget használtuk, a CHT-hez a k-adik momentumok is kellettek.

4 Március 18

A Brégmanból maradt darabkával kezdtünk.

4.1 Fix részgráfok az Erdős-Rényi $G(n,p)$-ben

Monoton csatolás: $U_e \sim \mathsf{Unif}[0,1]$ iid címkék, és $\omega_p := \{e \in E(K_n) : U_e \leq p\}$ — egy valszínteren definiált változók, minden $p \in [0,1]$-re, $G(n,p)$ eloszlással, és $p < q$-re $\omega_p \subseteq \omega_q$.

Ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ egy fölfelé zárt esemény, mint pld háromszög-tartalmazás, akkor $p \mapsto \mathbf{P}_p[\mathcal{A}]$ egy folytonos monoton növő függvény; folytonos, mert egy polinom, monoton pedig a csatolás miatt.

Első momentum módszerből X_n-re, ami a háromszög részgráfok száma: $p \ll 1/n$-re

$$\mathbf{P}[\exists \Delta \subset G(n,p)] \leq \mathbf{E}_p[X_n] \to 0\,.$$

Alsó becsléshez több kell.

4.2 Második momentum módszer

Cauchy-Schwarz-Paley-Zygmund: ha $X \geq 0$, akkor Cauchy-Schwarzot $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbb{1}_{X>0}X]$-re alkalmazva:

$$\mathbf{P}[X > 0] \geq \frac{(\mathbf{E}X)^2}{\mathbf{E}[X^2]}\,. \tag{4.1}$$

Sőt, $t \in (0,1)$-re,

$$\mathbf{E}[X](1-t) \leq \mathbf{E}\big[\mathbb{1}_{X>t\mathbf{E}X}X\big] \leq \mathbf{P}\big[X > t\mathbf{E}X\big]^{1/2}\,\mathbf{E}\big[X^2\big]^{1/2}\,. \tag{4.2}$$

A Csebisevvel ellentétben a (4.1) akkor is ad valamit, amikor $2(\mathbf{E}X)^2 < \mathbf{E}[X^2] < C\,(\mathbf{E}X)^2$, bármilyen fix C-re.

4.3 Vissza a háromszögekhez

Könnyen kiszámolható, hogy

$$\mathrm{Var}_p[X_n] \sim \frac{n^3}{6}p^3 + \frac{n^4}{2}p^5.$$

Ez $p \gg 1/n$-re $o((\mathbf{E}X)^2)$, így $\mathbf{P}[\exists\Delta \subset G(n,p)] \to 1$. Sőt, $p \sim \lambda/n$-re egy $a(\lambda) > 0$ alsó becslést kapunk, kicsi λ esetén $b(\lambda) < 1$ fölső becslést, így azt látjuk, hogy $\asymp 1/n$-nél történik az átcsapás, egy $\asymp 1/n$ méretű átcsapási ablakban játszódva le. [AS08, §4.4] és [Pet14, §12.2].

4.4 Threshold függvények

Ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ fölfelé zárt események sorozata, legyen $p_t^{\mathcal{A}}(n)$ az a p amire $\mathcal{A}$ valszíne t. **Kritikus** avagy **átcsapási ablak**: $\tau_\epsilon^{\mathcal{A}}(n) := p_{1-\epsilon}^{\mathcal{A}}(n) - p_\epsilon^{\mathcal{A}}(n)$.

Tétel [Bollobás-Thomason 87]: Minden fölfelé zárt eseményekből álló $\{\mathcal{A}_n\}$ sorozatra, ha $p(n) \gg p_{1/2}^{\mathcal{A}}(n)$, akkor $\mathbf{P}_{p(n)}[\mathcal{A}_n] \to 1$, ha pedig $p(n) \ll p_{1/2}^{\mathcal{A}}(n)$, akkor $\mathbf{P}_{p(n)}[\mathcal{A}_n] \to 0$. (Ha $p_{1/2}^{\mathcal{A}}(n)$ nem tart 0-hoz, akkor kicsit máshogy kell mondani, hogy ne legyen trivi.) Ezt ők hiperkockabeli izoperimetrikus egyenlőtlenségek segítségével bizonyították, de mi egy igen egyszerű bizonyítást adtunk, lásd [JŁR00, §1.5].

Más szóval, $\tau_\epsilon(n) = O(p_{1/2}^{\mathcal{A}}(n))$. Ha $\tau_\epsilon(n) = o(p_{1/2}^{\mathcal{A}}(n))$ is igaz, akkor **sharp**, ha nem, akkor **coarse threshold**ról beszélünk. Láttuk, hogy a háromszögtartalmazásnak coarse thresholdja van. Nem bizonyítjuk (diszkrét Fourier-analízis kellene hozzá), de coarse pontosan akkor, ha a tulajdonság "lokális" [Friedgut-Bourgain 1999].

5 Március 24

5.1 Kiegészítések a $G(n,p)$ részgráfjaihoz

Egy fix H véges gráf maximális sűrűsége legyen $\rho(H) := \max\{e(H')/v(H') : H' \subseteq H\}$. Egy gráfot kiegyensúlyozottnak szoktak hívni, ha $\rho(H) = e(H)/v(H)$. Az első momentum módszer rögtön adja, hogy a $p_{1/2}^H(n)$ threshold az biztos legalább $n^{-1/\rho(H)}$ nagyságrendű. Erdős-Rényi igazolták, hogy valóban ennyi is. Lásd [AS08, §4.4].

Meg lehet nézni pld $G(n,1/2)$ legnagyobb klikkjét is. Működik az első és második momentum módszer: ha $k = k_n$ olyan, hogy

$$f(n,k) := \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} \to 0\,,$$

akkor $\mathbf{P}[\omega(G(n,1/2)) \geq k_n] \to 0$, ha pedig $f(n,k) \to \infty$, akkor $\mathbf{P}[\omega(G(n,1/2)) \geq k_n] \to 1$. Ez $k_n \sim 2\log_2 n$ értéknél következik be, és könnyű látni, hogy egyetlen k_n érték lehet, amire $f(n,k)$ se nem pici, se nem nagy. Erre a k_n-re tehát $\mathbf{P}[\omega(G(n,1/2)) \in \{k_n, k_n+1\}] \to 1$, szóval aszimptotikusan két lehetséges értéke van csak $\omega(G(n,1/2))$-nek, ami első ránézésre döbbenetes koncentráció. Ha nem világosan a részletek, lásd [AS08, §4.5].

5.2 A fürt-méretek fázisátmenete

A részgráf-tartalmazás durva átcsapása után egy éles átcsapást fogunk most vizsgálni: a térfogattal összemérhető méretű óriás komponens megjelenését. Intuitíven talán világos, hogy $p = 1/n$ környékén kell számítani erre, mert ha elkezdjük fölfedezni egy adott csúcs komponensét, akkor

$p = (1+\epsilon)/n$-nél az első sok lépésben $\mathsf{Poi}(1+\epsilon)$ körüli új csúcsot kapunk minden lépésben, ami $\epsilon > 0$-ra bíztató, $\epsilon < 0$-ra pedig elszomorító, ha nagy komponenst akarunk.

Tétel [Erdős-Rényi 1960, Łuczak 1990, Aldous 1997]: Ha $\mathscr{C}_i$ az i-edik legnagyobb fürt $p \sim (1+\epsilon_n)/n$-nél, akkor

(i) $n^{-1/3} \ll -\epsilon_n \ll 1$ esetén, $j \geq 1$ fix,

$$\frac{|\mathscr{C}_j|}{2\epsilon_n^{-2}\log(\epsilon_n^3 n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1\,.$$

Speciálisan, ha $\epsilon_n < \epsilon$, ahol $\epsilon > 0$ fix, akkor a legnagyobb fürt mérete $O(\log n)$.

(ii) Ha $\epsilon_n = \lambda n^{-1/3}$, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ fix, a véletlen $(|\mathscr{C}_1|, |\mathscr{C}_2|, \dots)/n^{2/3}$ vektornak egy nemdegenerált határeloszlása van: vegyünk egy Brown-mozgást $\lambda - t$ drifttel t időpontban, és ennek a pozitív kirándulásainak hosszát csökkenő sorrenben.

(iii) Ha $n^{-1/3} \ll \epsilon_n \ll 1$, akkor

$$\frac{|\mathscr{C}_1|}{2\epsilon_n n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1\,,$$

míg minden $j \geq 2$-re

$$\frac{|\mathscr{C}_j|}{2\epsilon_n^{-2}\log(\epsilon_n^3 n)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1\,.$$

Speciálisan, $\epsilon_n > \epsilon > 0$ esetén van egy óriás fürt, minden más fürt pedig $O(\log n)$ méretű.

A $\log n \to n^{2/3} \to n$ átmenetet Erdős és Rényi "double jump"-nak hívták; azóta már természetes, hogy a kritikus ablakban érdekes hatványok jelennek meg. A tételt nem fogjuk minden részletében bizonyítani, de azt látni fogjuk, mi történik fix $\epsilon < 0, \epsilon = 0, \epsilon > 0$ esetén. Ehhez először végtelen fákkal kell foglalkoznunk.

5.3 Elágazó folyamatok avagy Galton-Watson fák

Legyen ξ a gyerekeloszlás, Z_n az n-edik generáció mérete. Ha $\mu = \mathbf{E}\xi \leq 1$, de $\mathbf{P}[\xi = 1] \neq 1$, akkor a folyamat majdnem biztosan kihal. Ha $\mu > 1$, akkor pozitív valszínnel örökre túlél. Erre három bizonyítást is csinálunk; lásd [Pet14, (12.4) és Exercise 12.10 környéke] és [Dur10, §5.3.4].

Első bizonyítás: az $f(z) = \mathbf{E}[z^\xi]$ generátorfgv vizsgálata. $\mathbf{P}[Z_n = 0] = f^{\circ n}(0)$.

Második bizonyítás: $\mu < 1$-re első momentum módszer, $\mu > 1$-re második momentum módszer, $\mu = 1$-re martingál konvergencia tétel: Z_n/μ^n mindig egy martingál, és az egészekből álló Z_n csak 0-hoz tud konvergálni.

Kimondtunk néhány **Martingál Konvergencia** és **Opcionális Megállási Tételt** és láttunk néhány példát és ellenpéldát; lásd pld [Pet14, §6.3] és [Dur10, Chapter 5].

6 Március 25

6.1 GW-fák harmadik bizonyítás

Az aktív csúcsok száma mélységi bejárásnál (breadth first search): $S_0 = 1$ és $S_{i+1} = S_i + X_i - 1$, ahol X_i iid ξ. Az a kérdés, hogy a $\tau_0 = \min\{i : S_i \leq 0\}$ megállási idő majdnem biztosan véges-e (azaz bekövetkezik-e); pontosan akkor hal ki a fa, ha ez véges [Pet14, Figure 12.2]. Egy bolyongásunk van $Y_i = X_i - 1$ ugrásokkal, $\mathbf{E}Y_i = \mu - 1$.

Ha $\mu < 1$, akkor NSZT szerint $S_n \to -\infty$, így $\mathbf{P}_1[\tau_0 < \infty] = 1$.

Ha $\mu > 1$, akkor NSZT szerint $S_n \to \infty$, így létezik $K > 0$, hogy $\mathbf{P}_1\big[\min_{i\geq 0} S_i > -K\big] > c_1 > 0$, miközben $\mathbf{P}_1[\tau_K < \tau_0] > c_2 > 0$ nyilván, és így $\mathbf{P}_1[\tau_0 = \infty] > c_1 c_2 > 0$.

Végül, $\mu = 1$ esetén, pld a Chung-Fuchs tétel szerint [Dur10, §4.2], rekurrens az S_n bolyongás, hiszen $S_n/n \to 0$ valószínűségben, így megintcsak bekövetkezik τ_0.

6.2 Chung-Fuchs kitérő

A tételt nem bizonyítottuk, de néztük a következő nagyon szép anti-példát: ha az ugrások eloszlása Cauchy, sűrűségfgve $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, akkor rekurrens bolyongást kapunk, pedig a NSzGyT nem igaz.

Először is, a $\{B_t, t \geq 0\}$ 2-dim Brown-mozgás forgatásinvariáns (hiszen a normális eloszlás is az) és időcserétől eltekintve skálainvariáns (hiszen a normális eloszlás is az). Na jó, a "hiszen" az túlzás: elvileg lehetne, hogy minden fix t-re forgatás- és skálainvariáns, de az együttes eloszlás nem az. Mindenesetre az állítás igaz, sőt, a folyamat konforminvariáns is (Lévy 1941).

Vegyük a $\tau(\ell) := \min\{t \geq 0 : B_t\ x\text{-koordinátája } \ell\}$ megállási időket. Könnyű látni, hogy a forgásinvariancia miatt a $B_{\tau(1)}$ y-koordinátájának eloszlása $\tan(\mathsf{Unif}[0, 2\pi])$, ami pont a Cauchy. Namármost, világos, hogy $B_{\tau(2)} = B_{\tau(1)} + B'_{\tau(1)}$, két független kópia. Másrészt a skálainvariánsság miatt $B_{\tau(2)} \stackrel{d}{=} 2B_{\tau(1)}$. Általánosabban is, azt kapjuk, hogy n darab fgtlen Cauchy átlaga megintcsak Cauchy. Tehát a NSzGyT nem teljesül.

Ami a rekurrenciát illeti, az előző bekezdés miatt

$$\mathbf{P}[S_n \in (-\epsilon, \epsilon)] = \mathbf{P}[S_n/n \in (-\epsilon/n, \epsilon/n)] = \mathbf{P}[S_1 \in (-\epsilon/n, \epsilon/n)]\,,$$

ami fix $\epsilon > 0$-ra és nagy n-re aszimptotikusan $2\epsilon/(\pi n)$, a sűrűségfgv miatt. Tehát az S_n által a $(-\epsilon, \epsilon)$-ba érések várható száma végtelen. Na de két ilyen beérés, n, m között az ugrás mérete $|S_n - S_m| < 2\epsilon$. Ha $\mathbf{P}[\exists n : S_n \in (-2\epsilon, 2\epsilon,)] < 1$ lenne, akkor az ilyen 2ϵ ugrások száma geometriai lenne, véges várható értékkel. De láttuk, hogy a várható érték végtelen, tehát $\mathbf{P}[\exists n : S_n \in (-2\epsilon, 2\epsilon,)] = 1$ minden $\epsilon > 0$-ra, ami a rekurrencia definíciója.

6.3 A kritikus eset részletei

Rendben, hogy kihal a folyamat, de mekkora valószínűséggel kapunk nagy n térfogatú fát, azaz mekkora $\mathbf{P}_1[\tau_0 \geq n]$? És hogy néz ki egy ilyen nagy fa, például mekkora a mélysége?

A következő állítást mondtam ki: ha $\mathbf{E}\xi = 1$ és $\mathrm{Var}\xi = \sigma^2 \in (0, \infty)$, akkor

$$\mathbf{P}_1[\tau_0 > n] \asymp \mathbf{P}_1[\tau_{\sqrt{n}} < \tau_0] \asymp 1/\sqrt{n}\,, \tag{6.1}$$

ahol a τ_0 az első pillanat, amikor $S_n \leq 0$, és τ_k az első pillanat, amikor $S_n \geq k$.

Ebből eddig a második egyenlőséget próbáltuk bizonyítani, egy MG Opcionális Megállási Tétel segítségével: tetszőleges $0 < \ell < k$-re, ha $\mathbf{E}|\xi - 1| = \nu$ (itt a véges szórás feltétel mintha nem is kellene), akkor

$$\frac{\ell + \nu}{k + \nu} \geq \mathbf{P}_\ell[\tau_k < \tau_0] \geq \frac{\ell}{k + \nu}\,.$$

Ehhez az kellett volna, hogy $k \leq \mathbf{E}[S_{\tau_k} \mid \tau_k < \tau_0] \leq k + \nu$ és $0 \geq \mathbf{E}[\tau_0 \mid \tau_k > \tau_0] \geq -\nu$, és innen

$$\ell = \mathbf{E}S_0 = \mathbf{E}S_{\tau_0 \wedge \tau_k} = \mathbf{E}[S_{\tau_k} \mid \tau_k < \tau_0]\,\mathbf{P}[\tau_k < \tau_0] + \mathbf{E}[S_{\tau_0} \mid \tau_k > \tau_0]\,\mathbf{P}[\tau_k > \tau_0]\,.$$

Csakhogy a következő órán András rávilágított, hogy ez egyáltalán nem világos: a τ_k előtti utolsó ugrásról nem csak azt tudjuk, hogy pozitív volt, hanem, mivel az utolsó volt, nagyobb lehet, mint egy szokásos pozitív ugrás. És így még azon is el kellene gondolkozunk, hogy milyen Opcionális Megállási Tételt használunk, ugyanis $S_{\tau_0 \wedge \tau_k}$ nem feltétlen korlátos.

7 Március 31

Egész órán a (6.1)-t bizonygattuk, de volt az András által talált lyuk a második egyenlőségben, és különféle pontatlanságok az elsőben, úgyhogy most leírok egy teljes bizonyítást. De ez bizony csak akkor működik, ha ξ-ről exponenciálisan lecsengő farkat feltételezünk: létezik $K \in \mathbb{N}$ és $0 < q < 1$, hogy minden $k \geq K$-ra $\mathbf{P}[\xi \geq k+1] \leq q\,\mathbf{P}[\xi \geq k]$. Erre a kurzusra ez elég, mert vagy $\xi \sim \mathsf{Poi}(1+\epsilon)$ vagy $\xi \sim \mathsf{Binom}(d,p)$ lesz.

7.1 A (6.1) második egyenlősége: milyen magasra megyünk?

Idézzük föl, hogy az S_i bolyongás ugrásai $Y = \xi - 1$ eloszlásúak. Tetszőleges $j \in \mathbb{N}$-re,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\big[S_{\tau_k} - k \geq j \bigm| \tau_k < \tau_0\big] &= \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}\big[S_{\tau_k} \geq k+j,\, S_{\tau_k - 1} = k - i \bigm| \tau_k < \tau_0\big] \\
&= \sum_{i \geq 1} \mathbf{P}[Y \geq i+j \mid Y \geq i]\, \mathbf{P}[S_{\tau_k - 1} = k-i \mid \tau_k < \tau_0] \\
&\leq \sum_{i \geq 1} q^j\, \mathbf{P}[S_{\tau_k - 1} = k-i \mid \tau_k < \tau_0] = q^j\,.
\end{aligned}
$$

Tehát a túlugrásnak is exponenciális farka van, k-tól függetlenül. Ebből persze következik, hogy $k \leq \mathbf{E} S_{\tau_k} \leq k + C(q)$ és $0 \geq \mathbf{E} S_{\tau_0} \geq -C(q)$, továbbá $\{S_i : i \leq \tau_0 \wedge \tau_k\}$ egy egyenletesen integrálható MG, így az Opcionális Megállási Tétel [Dur10, Thm 5.7.4] alkalmazható, és az előző heti érvelés működik.

7.2 A (6.1) első egyenlősége: mennyi időnk van?

Jelöljük az ugrás momentumait $\mathbf{E}[Y^m] = \mu_m$-mel.

Világos, hogy $S_n^2 - \mu_2 n$ egy martingál, hiszen

$$
\mathbf{E}\big[(S_n + Y_{n+1})^2 \bigm| S_n\big] = S_n^2 + 2 S_n \mathbf{E}[Y_{n+1}] + \mathbf{E}[Y_{n+1}^2] = S_n^2 + \mu_2\,.
$$

A k-n illetve 0-n való túlugrás exponenciális farkából könnyen következik, hogy $\mathbf{E}\big[S_{\tau_k}^m \bigm| \tau_k < \tau_0\big] = k^m + O_m(k^{m-1})$ és $\mathbf{E}\big[S_{\tau_0}^m \bigm| \tau_k > \tau_0\big] = O_m(1)$. Max k lépés alatt bárhonnan befejeződhet a séta, egy k-től függő pozitív valszínnel, ezért τ-nak egy k-től függő exponenciális farka van, és könnyű látni, hogy $S_n^2 - \mu_2 n$ egyenletesen integrálható. Tehát alkalmazható rá az Opcionális Megállási Tétel:

$$
\ell^2 = \mathbf{E}_\ell\big[S_{\tau_0 \wedge \tau_k}^2 - \mu_2(\tau_0 \wedge \tau_k)\big] \sim \frac{\ell}{k}(k^2 + O(k)) + \left(1 - \frac{\ell}{k}\right) O(1) - \mu_2 \mathbf{E}_\ell[\tau_k \wedge \tau_0]\,,
$$

és így

$$
\mathbf{E}_\ell[\tau_k \wedge \tau_0] \sim \ell(k-\ell)/\mu_2\,. \tag{7.1}
$$

Szeretnénk egy kis koncentrációt is $\tau_k \wedge \tau_0$-ra, ehhez a második momentuma kellene, ehhez pedig még egy martingál. Valóban, könnyen megtalálhatóak azok az $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ konstansok, melyekkel $S_n^4 + AnS_n^2 + BnS_n + Cn^2 + Dn$ egy martingál. Ez HF, de ellenőrzésnek itt az eredmény: $A = -6{\mu_2}^{1/2}$, $B = -4\mu_3$, $C = 3\mu_2^{3/2}$, $D = 3\mu_2^{3/2} - \mu_4$.

A fenti egyenletes integrálhatóság és Opcionális Megállási Tétel érvelést alkalmazva erre a martingálra, átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{E}_\ell[(\tau_k \wedge \tau_0)^2] \le O(\ell k^3)\,. \tag{7.2}$$

Ezeket a momentumbecsléseket most valószínűségekké fordítjuk. Egyrészt, (7.1) és a Markov-egyenlőtlenség azt adja, hogy $\mathbf{P}_\ell[\tau_k \wedge \tau_0 > k^2/(2\mu_2)] \le 1/2$. Tehát, fölvágva a $[0,n]$ időintervallumot $k^2/(2\mu_2)$ hosszú darabokra, mindegyiket csak legfeljebb $1/2$ valszínnel éljük túl (bárhová is érkeztünk az előző részintervallum túlélése keretében), így

$$\mathbf{P}_\ell[\tau_k \wedge \tau_0 > n] < \exp(-cn/k^2)\,, \tag{7.3}$$

ahol $c = c(\mu_2) > 0$. Másrészt, (7.2) és a Második Momentum Módszer (4.2) azt adják, hogy

$$\mathbf{P}_{ck}[\tau_k \wedge \tau_0 > k^2] \ge \delta(c) > 0\,, \tag{7.4}$$

tetszőleges $c \in (0,1)$-re, ha k elég nagy.

Nos, mindezen előkészületek után, fölbontva a minket érdeklő eseményt aszerint, hogy $\max_{0 \le i \le \tau_0} S_i$ kábé mennyi:

$$\mathbf{P}_1[\tau_0 > n] = \mathbf{P}_1\big[\tau_0 > n,\ \tau_{\sqrt{n}} < \tau_0\big] + \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 \sqrt{n} \rfloor} \mathbf{P}_1\Big[\tau_0 > n,\ \tau_{\sqrt{n}/2^{k+1}} < \tau_0 < \tau_{\sqrt{n}/2^k}\Big] \tag{7.5}$$

Az első tagban $\mathbf{P}_1[\tau_{\sqrt{n}} < \tau_0] \sim 1/\sqrt{n}$, míg (7.4)-et használva:

$$1 \ge \mathbf{P}_1\big[\tau_0 > n \bigm| \tau_{\sqrt{n}} < \tau_0\big] \ge \mathbf{P}_{\sqrt{n}}\big[\tau_0 \wedge \tau_{2\sqrt{n}} > n\big] > \delta > 0\,.$$

Tehát a (7.5) első tagja $1/\sqrt{n}$ nagyságrendű. Ami a szummás tagot illeti, mit tesz az ottani kondícionálás a bolyongással? Ez lényegében egy Doob-transzformált (lásd §9.1 alább): először 1-ből indulva a $\tau_{\sqrt{n}/2^{k+1}} < \tau_0$ feltétel szerinti Doob transzformált, majd $\sqrt{n}/2^{k+1}$-ből továbbindulva a $\tau_{\sqrt{n}/2^k} > \tau_0$ feltétel szerinti Doob transzformált. Így hát

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_1\Big[\tau_0 > n \Bigm| \tau_{\sqrt{n}/2^{k+1}} < \tau_0 < \tau_{\sqrt{n}/2^k}\Big] &\le \mathbf{P}_1\big[\tau_{\sqrt{n}/2^{k+1}} \ge n/2 \bigm| \tau_{\sqrt{n}/2^{k+1}} < \tau_0\big] \\ &\qquad + \mathbf{P}_{\sqrt{n}/2^{k+1}}\big[\tau_0 \ge n/2 \bigm| \tau_{\sqrt{n}/2^k} > \tau_0\big] \\ &< \exp(-c' 2^{2k}) + \exp(-c' 2^{2k})\,,\end{aligned}$$

mindkét tagot a (7.3) egy egyszerű kiterjesztésével becsülve: a Doob transzformáltra is könnyen igazolható egy megfelelő martingállal, hogy a (7.1)-beli várható érték legfeljebb $O(k^2)$, és így a Markov-egyenlőtlenség megint alkalmazható. Ami pedig magát a feltételt illeti, (7.1) szerint

$$\mathbf{P}_1[\tau_{\sqrt{n}/2^{k+1}} < \tau_0 < \tau_{\sqrt{n}/2^k}] \sim \frac{2^{k+1}}{\mu_2\sqrt{n}} - \frac{2^k}{\mu_2\sqrt{n}} = \frac{2^k}{\mu_2\sqrt{n}}\,.$$

Ezeket kombinálva, a (7.5)-beli szumma legfeljebb

$$\frac{O(1)}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2 \sqrt{n} \rfloor} 2^k \exp(-2^{2k}) = \frac{O(1)}{\sqrt{n}}\,,$$

és készen vagyunk.

8 Április 1

8.1 A szubkritikus és szuperkritikus eset részletei

Nagy-eltérés tétel: legyen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ iid összeg, ahol $\mathbf{E}X_i = \mu$, és a momentumgeneráló fgv $\mathbf{E}[e^{tX_i}]$ létezik valamilyen $t > 0$-ra. Ekkor minden $\alpha > \mu$-ra a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mathbf{P}\big[S_n > \alpha n\big]}{n} = -\gamma(\alpha) \tag{8.1}$$

limesz létezik, $\gamma(\alpha) > 0$, és az X_i eloszlás nagy-eltérés rátafüggvényének hívják. Pld $X_i \sim \mathsf{Bernoulli}(p)$-re

$$\gamma_p(\alpha) = \alpha \log \frac{\alpha}{p} + (1-\alpha)\log\frac{1-\alpha}{1-p}\,, \tag{8.2}$$

ami a $\mathsf{Bernoulli}(\alpha)$ úgynevezett relatív entrópiája a $\mathsf{Bernoulli}(p)$ eloszlásra nézve. Lsd pld [Dur10, Section 2.6], illetve `http://en.wikipedia.org/wiki/Relative_entropy`. Egy általánosabb de gyengébb korlátot mi is fogunk majd bizonyítani, Azuma-Hoeffding lesz a neve.

Ebből persze következik, hogy egy negatív driftű bolyongás exponenciális farokkal tud csak pozitív maradni:

$$\mathbf{P}_1[\tau_0 > n] \le \mathbf{P}[S_n \ge 0] \le \exp(-\gamma n)\,. \tag{8.3}$$

A szuperkritikus esetről meg a következő gyönyörű dualitást hasznos tudni: ha veszünk egy szuperkritikus GW_ξ-fát $f(z) = \mathbf{E}[z^\xi]$ generátorfgvénnyel és q kihalási valószínűséggel, kondícionáljuk túlélésre, és vesszük az azon csúcsokból álló részfát, akiknek végtelen leszármazotti láncuk van, akkor megint csak egy GW fát kapunk, ξ^* gyerek-eloszlással, ahol

$$\mathbf{P}[\xi^* = k] = \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} (1-q)^{k-1} q^{j-k} \mathbf{P}[\xi = j]\,.$$

Ez intuitíven elég világos, de van egy teljes (és nem hosszú) bizonyítás pld [LP14, Section 5.7]-ben. Ráadásul ennek a ξ^*-nak az f^* generátorfgvénye pont az $f(z)$-nek a $[q,1]^2$-beli része átskálázva $[0,1]^2$-belivé. (Ezt a kiemelt formulából könnyű bizonyítani.) Világos, hogy $\mathbf{P}[\xi^* = 0] = 0$ és $\mathbf{E}\xi^* = \mathbf{E}\xi$.

Ha pedig kihalásra kondícionáljuk a GW_ξ-t, akkor is egy GW-fát kapunk, $\tilde\xi$ gyerek-eloszlással, aminek az $\tilde f$ generátorfgvénye pont az $f(z)$-nek a $[0,q]^2$-beli része átskálázva $[0,1]^2$-belivé. Erre nyilván $\mathbf{E}\tilde\xi = f'(q) < 1$.

A bolyongásos explorációt használva, a GW_{ξ^*} és $\mathsf{GW}_{\tilde\xi}$ állítás is következik az előző órai Doob-transzformációból. (Ezen érdemes elgondolkodni, de nem része a törzsanyagnak. Viszont valamilyen technikával tudj azért mondani valamit arról, miért GW-fa legalább az egyik.)

8.2 Vissza a fürtméret fázisátmenethez

A GW-eredményeket felhasználva bizonyítottuk az § 5.2-ben kimondott $G(n,(1+\epsilon)/n)$ tételt. Lásd [Pet14, §12.2] vagy [AS08, §10.4-10.6]. Utóbbiban egy csomó engem nagyon taszító explicit számolás van a fenti módszer bizonyos részei helyett.

9 Április 7

9.1 Bolyongás Doob-transzformáltja

Valójában ma mondtam csak el az előző két héthez írtakhaz használt eszközt; lásd [Pet14, Lemma 6.12 és (6.8)].

9.2 Perkolációelmélet alapok

p_c definíciók ekvivalenciája, $p_c(\mathbb{Z}) = 1$, $p_c(\mathbb{T}_{d+1}) = 1/d$. Kolmogorov 0-1 törvény. Harris-FKG korrelációs egyenlőtlenség, indukciós bizonyítással. Lásd [Pet14, §12.1] és [LP14, §5.8]. A Harris egy általánosítása az Ahlswede-Daykin Four Functions tétel [AS08, Chp 6], de azt ki se mondtuk.

$\theta_x(p) = \mathbf{P}_p[x \longleftrightarrow \infty]$, mint növekvő folytonos fgvények csökkenő limesze, felülről félig folytonos. Kimondtuk Benjamini-Schramm (1996) sejtését a p_c-beli folytonosságról minden olyan tranzitív gráfon, amire $p_c < 1$. A $\mathbb{Z}^3$ eset egy klasszikus nagy nyitott kérdés.

10 Április 8

10.1 Peierls kontúr-módszer

$1/3 \leq p_c(\mathbb{Z}^2, \text{él}) \leq 2/3$ könnyű: unió-korlát és Peierls. Lásd [Pet14, §12.1].

Az alsó becslés könnyen általánosítható: max d-fokú gráfra $p_c(G) \geq 1/(d-1)$. A felső nehezebb: kellene, hogy legfeljebb $\exp(Cn)$ darab n méretű minimális vágóhalmaz legyen egy csúcs körül. Ez ismert például végesen prezentált egy-végű csoportok Cayley-gráfjaira. Erre egy egyszerű lineáris algebra bizonyítás Timár Ádámtól van, lásd [Pet14, §12.1], Proposition 12.6 és környéke, de mi nem vettük.

Sejtés [Benjamini-Schramm 96]: ha G kielégít egy $(1+\epsilon)$-dimenziós izoperimetrikus egyenlőtlenséget (definíciót lásd ([Pet14, §5.1]), akkor $p_c(G) < 1$.

10.2 Harris-Kesten tétel első fele; RSW technológia

Bal-jobb átmenet valószínűsége $\mathbb{Z}^2$ élperkolációban $n\times(n+1)$-es "négyzetben", illetve Δ háromszögrács csúcsperkolációban n oldalú rombuszban, $p = 1/2$ értéken, pontosan $1/2$, függetlenül n-től. Ebből már meg lehet tippelni a tételt, hogy $p_c(\mathbb{Z}^2, \text{él}) = p_c(\Delta, \text{csúcs}) = 1/2$.

Harris (1960) irány, $\theta(1/2) = 0$, következik a Russo-Seymour-Welsh technológiából, aminek a Smirnov-féle bizonyítását vettük. Sőt, diadikus körgyűrűket véve és a Harris-FKG-t használva az is következik, hogy

$$n^{-\alpha} < \mathbf{P}_{1/2}[o \longleftrightarrow \partial B_n^{\mathbb{Z}^2}(o)] < n^{-\beta} .$$

Az ilyen polinomiális lecsengés a kritikus rendszerek sajátja. Pld a kritikus GW (6.1) eredményünkből nem nehéz bizonyítani (gondold át), hogy a $\mathbb{T}_{d+1}$ reguláris fán kritikusan perkolálva,

$$\mathbf{P}_{1/d}[o \longleftrightarrow \partial B_n^{\mathbb{T}_{d+1}}(o)] \asymp \frac{1}{n} .$$

Kimondtuk Smirnov konforminvariancia-tételét és a síkgráfokra vonatkozó univerzalitás sejtést is. Mindezekhez forrás: [Pet14, §12.3].

11 Április 14

11.1 Harris-Kesten tétel második fele; Margulis-Russo formula

A Kesten (1980) irányhoz, $\theta(1/2+\epsilon) > 0$, kellenek még a Margulis-Russo-formula és a pivotálisok fogalma. Lásd [Pet14, §12.2, §12.3].

Kis hézag a bizonyításunkban, hogy az RSW technológiát használnunk kell nemcsak $p = 1/2$-en, hanem minden olyan p-re, ahol a négyzetbeli bal-jobb átmenet valószínűsége ϵ és $1-\epsilon$ közötti (csak a konstans faktorok függeni fognak ϵ-tól), viszont Smirnov RSW-bizonyítása csak a $p = 1/2$-en működik. Viszont van olyan bizonyítás, ami működik, ezt most elhisszük.

11.2 Éles fázisátmenetekről még egyszer

A Russo-formula szerint az éles átmenet ekvivalens azzal, hogy várható értékben sok pivotális van. Bizonyos eseményekre a pivotalitást pontosan megérteni nehéz lehet, ezért fontos, hogy további feltételeket, jobban kezelhető becsléseket is adjunk. Az általános hiperkocka izoperimetria-egyenlőtlenség pld ilyen: minden halmaznak elég nagy határa van, és a legkisebb határúak csak kevés koordinátától függenek [Pet14, Exercise 5.11, Hart 1976], tehát sok koordinátától függő eseményeknél valóban lehet számítani sok pivotális bitre. Említettük §4.4-ben a Friedgut-Bourgain (1999) tételt, amely szerint globális tulajdonságoknak van éles átcsapása. Egy korábbi, de robusztusabb eredmény, amelyet viszonylag könnyű használni [Bourgain-Kahn-Kalai-Katznelson-Linial 1992]:

$$\mathbf{E}_p|\mathsf{Piv}(\mathcal{A})| \geq c\,\mathbf{P}_p[\mathcal{A}]\,(1-\mathbf{P}_p[\mathcal{A}])\,\log\frac{1}{2\,m_p^{\mathcal{A}}}\,, \tag{11.1}$$

ahol $m_p^{\mathcal{A}} := \max_i \mathbf{P}_p[i \in \mathsf{Piv}(\mathcal{A})]$. Továbbá, ha az $\mathcal{A}$ esemény n biten van értelemezve:

$$m_p^{\mathcal{A}} \geq c\,\mathbf{P}_p[\mathcal{A}]\,(1-\mathbf{P}_p[\mathcal{A}])\,\frac{\log n}{n}\,. \tag{11.2}$$

Van egy kis fekete-mágia szaga a dolognak: ha minden bitre a pivotalitás valószínűsége kicsi, akkor összesen sok pivotális van várható értékben.

Egy nagyon egyszerű példa, ami segíthet eloszlatni a misztikusságot: ha $n = 2m+1$ biten nézzük a többségi szavazást, akkor minden egyes bit kevéssé számít (ő csak akkor pivotális, ha a többiek m vs m arányban szavaztak, aminek a valószínűsége $\asymp 1/\sqrt{n}$), viszont a pivotálisak várható száma így $\asymp n \cdot 1/\sqrt{n} = \sqrt{n}$, amiről lehet bizonyítani, hogy a legnagyobb lehetséges érték, tehát a többségi szavazás a lehető leggyorsabb átcsapású monoton függvény. Ezzel a példával a Centrális Határeloszlás Tételt fogalmaztuk át: ha sok kis-szórású valváltozót összeadunk, akkor normális eloszlást kapunk, nagy koncentrációval a várható értéke körül.

Ezeket az eredményeket nem bizonyítottuk (lásd pld [Gri10, §4], ha érdekel), de a hasonló lelkületű Azuma-Hoeffding martingál-egyenlőtlenség lesz a következő óra anyaga.

12 Május 5

12.1 Azuma-Hoeffding martingál-koncentráció

Kezdtük az egyenlőtlenséggel és bizonyításával; lásd [AS08, §7.2], [Pet14, §1.2]. Két közvetlen következmény: kromatikus szám és hiperkocka mérték-koncentráció [AS08, Thm 7.24, Thm 7.5.3].

Utóbbit (az előző szekció szellemében) egy izoperimetrikus egyenlőtlenségnek is föl lehet fogni. Egy kevésbé közvetlen alkalmazás a következő szekció anyaga.

12.2 A $G(n, 1/2)$ kromatikus száma

Tétel [Bollobás 1988]: $\mathbf{P}\big[\chi(G(n,1/2)) \sim n/(2\log_2 n)\big] \to 1$. [AS08, §4.5, §7.3, §10.3]

Ehhez a fő lemma, amihez az Azuma-Hoeffdinget használtuk az éldiszjunkt k-klikkek maximális számára: ha $k \sim 2\log_2 n$ elég kicsi ahhoz, hogy $G(n, 1/2)$ k-klikkeinek a várható száma már $n^{3+o(1)}$-nél nagyobb legyen, akkor már óriási valószínűséggel lesz is k-klikk: $\mathbf{P}\big[\omega(G(n,1/2)) < k\big] < e^{-(c+o(1))\, n^2/\ln^8 n}$. Innen pedig már nem nehéz a kromatikus szám becslés, persze használva, hogy $\omega(G(n, 1/2)) \stackrel{d}{=} \alpha(G(n, 1/2))$.

13 Május 6

13.1 Lovász Lokális Lemma

Kimondtuk és bizonyítottuk a LLL-t, általános és szimmetrikus alakban, lásd [AS08, §5.1].

A szimmetrikus alak egy azonnali következménye, hogy ha egy n-uniform hipergráf minden éle legfeljebb d másik élt metsz, és $e(d + 1) \le 2^{n-1}$, akkor az élek 2-színezhetőek [AS08, Thm 5.2.1]. Azaz a §2.2-beli állítás úgy is igaz marad, ha csak lokálisan olyan a hipergráf, mint ott az egész hipergráf volt, egy e faktornyi gyengítéstől eltekintve.

Láttuk a legelső órán a Ramsey számokról , hogy fix ℓ és $k \to \infty$ esetén $R(k, \ell) \ge k^{\ell/2+o(1)}$. A Lokális Lemma általános alakjával azt lehet bizonyítani [Spencer 1977], hogy

$$R(k, \ell) \ge k^{\frac{\binom{\ell}{2}-1}{\ell-2}+o(1)}\,,$$

ami $\ell = 3$-ra már lényegében egyezik az igazsággal. A paraméterek optimalizálását nem csináltuk meg, de az alapötlet világos kell, hogy legyen; lásd [AS08, §5.3].

13.2 Markov-lánc keverési idők

Sajnos erre nagyon kevés időnk jutott. Két kimondott állításunk bizonyítását ezért ezennel hadd adjam hozzá a tananyaghoz, hogy legyen egy kevés konkrét nemtriviális matematikai tartalom is. Tehát az anyag az alább fölsorolt definíciók és állítások, bizonyításokkal együtt; minden megtalálható pld [Pet14, §6.1, §7.3]-ban. Továbbá egy nagyszerű tankönyv: [LPW09].

Diszkrét idejű, megszámlálható V állapotterű Markov-lánc, stacionárius és reverzibilis mértékek fogalma. Markov operátor $Pf(x) := \sum_{y\in V} p(x, y)f(y)$ az $L^2(V, \pi)$-n, π stacionárius mértékkel, $(f, g)_\pi = \sum_{x\in V} f(x)g(x)$ belsőszorzással. A reverzibilitás ekvivalens P önadjungáltságával. Továbbá minden reverzibilis Markov-lánc valójában egy élsúlyozott irányítatlan gráfon való bolyongás, $c(x, y) = \pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x) = c(y, x)$ élsúlyokkal.

Ha $|V| = n$ véges és P reverzibilis, akkor sajátértékei: $-1 \le \lambda_n \le \cdots \le \lambda_1 = 1$. Vegyük észre, hogy $\lambda_2 < 1$ ekvivalens a súlyozott gráf összefüggőségével), $\lambda_n = -1$ pedig ekvivalens a páros gráfsággal. A $g := 1 - \lambda_2$ értéket spektrálrésnek, a $g_{\mathrm{abs}} := \min\{1 - \lambda_2, 1 - |\lambda_n|\}$ értéket abszolút spektrálrésnek szokták hívni. Miért fontos ez?

Theorem 13.1. *Legyen $\pi_* := \min_{x\in V} \pi(x)$. Ekkor tetszőleges x, y csúcsokra, $\left|\frac{p_t(x,y)-\pi(y)}{\pi(y)}\right| \le \frac{(1-g_{\mathrm{abs}})^t}{\pi_*}$, ahol $p_t(x, y)$ annak a valószínűsége, hogy x-ből indulva t lépés után y-ban vagyunk.*

Tehát $t = O(\frac{1}{g_{\text{abs}}} \log \frac{1}{\pi_*})$ lépés után már uniforman közel vagyunk a stacionárius eloszláshoz, mondjuk $|\frac{p_t(x,y)-\pi(y)}{\pi(y)}| \leq 1/4$, és ezután a távolság már exponenciálisan gyorsan csökken.

Megjegyzendő, hogy világos, miért az *abszolút* spektrálrést kell nézni: páros gráfoknál nem is fogunk konvergáini a stacionárius eloszláshoz.

Két fontos példa, ahol a teljes spektrum expliciten kiszámolható: egyszerű szimmetrikus bolyongás a C_n körön, illetve lusta bolyongás a $\{0,1\}^d$ hiperkockán; lásd [Pet14, §7.3]-at tippekhez és [LPW09]-t a részletes számolásokhoz. Egy harmadik fontos példa egy definíció:

Definition 13.1. *Egy G gráfot n csúcson (n,d,c)-expandernek hívunk (spektrális értelemben), ha maximális fokszáma legfeljebb d, spektrálrése pedig legalább $c > 0$. Általában fix c, d értékekre és végtelen sok n-re, azaz egy expander-sorozatra, gondolunk.*

A fenti Thm 13.1 szerint ezeken a séta $O(\log n)$ lépésben kever, ami a lehető legjobb nagyságrend, hisz a fokszámkorlát miatt az átmérő legalább $c_d \log n$.

Itt egy geometrai definíció is:

Definition 13.2. *Egy G gráfot n csúcson (n,d,h)-expandernek hívunk (izoperimetrikus értelemben), ha maximális fokszáma legfeljebb d és konduktanciája avagy Cheeger konstansa, ami* $\min \frac{|E(S,S^c)|}{|S| \wedge |S|^c}$, *legalább h.*

Theorem 13.2 (Alon-Milman)**.** *A két definíció lényegében egybeesik: $h^2/2 < c < 2h$.*

A bizonyítás alapötlete az, hogy a spektrálrést a Rayleigh-hányadossal számolhatjuk, $1 - \lambda_2 = \inf \left\{ 1 - \frac{(Pf,Pf)_\pi}{(f,f)_\pi} : (f, \mathbf{1})_\pi = 0 \right\}$, így a kicsi spektrálrés lényegében egy majdnem P-invariáns függvény létét, a kicsi Cheeger konstans pedig egy majdnem P-invariáns halmaz létét jelenti. Ha S egy rossz konduktanciájú halmaz, akkor $f = \alpha \mathbf{1}_S - \beta \mathbf{1}_{S^c}$, megfelelő α, β konstansokkal mutatni fogja a kis spektrálrést. Visszafelé kicsit bonyolultabb, és most nem kell tudnotok reprodukálni: be kell bizonyítani, hogy egy majdnem-invariáns f-nek létezik olyan $S_t := \{x \in V : f(x) \leq t\}$ nívóhalmaza, ami majdnem-invariáns.

A definíció egyszerű, de konkrét expandereket konstruálni már nehezebb. De egy véletlen d-reguláris gráf például nagy valószínűséggel jó expander.

Kulturális megjegyzések. Keverési idők becslésére három nagy módszercsoport van: 1) spektrális 2) izoperimetrikus 3) megállási idők és csatolások. Utóbbira egy példa, hogy ha tudunk két tetszőleges helyről induló bolyongást úgy csatolni, hogy nagy valószínűséggel találkozzanak kábé T lépésen belül, akkor a keverési idő (teljes variációs távolságban mérve) legfeljebb T. A terület egyik legfontosabb alkalmazása pedig az, hogy ha valamilyen bonyolult mértékből szeretnénk véletlen mintát venni (pld egy n csúcsú gráf jó k-színezésein, vagy egy magasdimenziós konvex testen az egyenletes mérték), akkor egy gyorsan keverő Markov-láncot kell definiálni, aminek az a stacionárius mértéke.

14 Vizsgatételek

1. Bevezető példák: Ramsey számok, nagy girth és kromatikus szám, Erdős-Kac, stb.
2. Hamilton-utak tournamentekben és Brégman-tétel
3. Erdős-Rényi részgráf fázisátmenet
4. Szubkritikus, kritikus, szuperkritikus Galton-Watson fák, és dualitásuk
5. Erdős-Rényi óriásfürt fázisátmenet ((6.1) bizonyításának részletei nélkül)
6. Perkolációelmélet alapok, Kolmogorov 0-1 törvény, Harris-FKG, Peierls-módszer, Russo-formula
7. Russo-Seymour-Welsh és Harris-Kesten
8. Azuma-Hoeffding és alkalmazásai
9. Lovász Lokális Lemma és alkalmazásai
10. Markov-lánc keverési idők

References

[AS08] N. Alon and J. Spencer. *The Probabilistic Method, 3rd Edition.* Wiley Interscience, 2008.

[Dur10] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples.* Fourth edition. Cambridge University Press, 2010.

[Gri10] G. Grimmett. *Probability on Graphs.* IMS Textbook Series, Vol. 1. Cambridge University Press, 2010. `http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/books/pgs.html`

[JŁR00] S. Janson, T. Łuczak and A. Ruciński. *Random graphs.* Wiley-Interscience, New York, 2000.

[LPW09] D. A. Levin, Y. Peres and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times.* With a chapter by J. G. Propp and D. B. Wilson. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. `http://www.uoregon.edu/~dlevin/MARKOV/`

[LP14] R. Lyons, with Y. Peres. *Probability on trees and networks.* Book in preparation, present version is at `http://mypage.iu.edu/~rdlyons`.

[Pet14] G. Pete. *Probability and Geometry on Groups.* Book in preparation, `http://www.math.bme.hu/~PGG.pdf`