2.házi feladat.Megoldások. Comment.

323/29. M. A következmény formalizálása:

$\{T \to \neg E, (E \wedge \neg V) \vee (V \wedge \neg E)\} \vDash \neg T \to \neg V$

Sejtésünk, hogy van olyan értékelés, hogy a premisszák igazak, de a konklúzió hamis.

Hogyan keressük ezt meg? Az igazságtáblát kell ismerni. Érdemes a konklúzióból kiindulni. Ha $\neg T \to \neg V = \downarrow$, ez azt jelenti, hogy $T = \downarrow$ és $V = \uparrow$. Erre az értékelésre az első premissza mindenképpen igaz. A második premissza az $E = \downarrow$ értékeléssel lesz igaz. Ezzel megtaláltuk a keresett értékelést.

Megj: A megadott nyelv állítás nyelv volt, tehát helytelen egyváltozós relációkat, pl. Tx, Ex, Vx és kvantorokat használni.

329/7 M. A következmény formalizálása:

$\{U \Leftrightarrow (B \vee E), E \to (B \vee H\} \vDash (\neg H \wedge E) \to B$

Azt sejtjük, hogy a konklúzió helyes. Az előző feladattal szemben, azt kell megmutatni, hogy nem létezik olyan igazság értékelés, amelyre a premisszák igazak, de a konklúzió hamis. A legegyszerűbben ezt *indirekt* tudjuk megmutatni. Tegyük fel, hogy $(\neg H \wedge E) \to B = \downarrow$ és a premisszák igazak egy értékelésre. Ez pontosan azt jelenti, hogy $H = \downarrow, E = \uparrow$ és $B = \downarrow$. Azonban erre az értékelésre a második premissza éppen hamis, így ellentmondásra jutottunk. Tehát valahányszor a premisszák igazak, a konklúzió is igaz.

Megj. A második premissza így szólt:"Dékáni engedélyt *csak akkor* kapunk, ha betegek voltunk, vagy haláleset fordult elő a családban." Ez az "akkor és csak akkor" ekvivalencia egyik része, tehát egyirányú implikáció. Többen ezt eltévesztették.

Az első állításnak nincs szerepe a következtetés helyességénél, hiszen U nem szerepel a konklúzióban.

324/33 M. A következmény fomalizálása:

$\{\forall x(Tx \wedge Rx \to Bx), \forall x(Fx \to \neg Rx)\} \vDash \forall x(Tx \wedge \neg Fx \to Bx)$

Az előző két példával szemben ez egy elsőrendű következtetés. Itt nem csak igazságértékelést, hanem olyan *struktúrát* keresünk, ahol a premisszák igazak a konklúzió pedig hamis. Az egyik ilyen legegyszerűbb struktúra 1 elemű. Legyen ez az elem a. Tehát a struktúra alaphalmaza: $\{a\}$. Ezután már kövessük a 29. feladatnál megismert okoskodást. Ha $\forall x(Tx \wedge \neg Fx \to Bx) = \downarrow$, ez azt jelenti, hogy $Ta \wedge \neg Fa \to Ba = \downarrow$, azaz $Ta = \uparrow, Fa = \downarrow$ és $Ba = \downarrow$. Könnyen látható, hogy ha Ra -t hanmisnak választjuk, akkor mindkét premissza igaz. Az egyéb igazság értékelések már tetszőlegesek lehetnek a struktúrán.

Megj. Ha nem találnánk 1 elemű a feltételeinket kielégítő struktúrát, akkor próbálkozhatnánk 2 elemű ilyen struktúrát keresni, stb.

Többen nem vettek arról tudomást, hogy itt elsőrendűű formulákról van szó és úgy kezelték a feladatot, mintha állításlogikai lenne. Ez általában helytelen, de jelen feladatnál bizonyos értelemben megtehető.

325/38

$\exists xPx \wedge \exists xQx$	$\exists xPx \wedge \exists yQy$
$\exists xPx \wedge \forall yQy$	$\exists zPz \wedge \forall zQz$
$\exists x(Px \wedge \forall yRxy)$	$\exists u(Pu \wedge \forall wRuw)$
$\forall x(Px \to \exists yRxy)$	$\forall x(Px \to \exists zRxz)$
$\forall x(Px \to \exists yRyx)$	$\forall z(Pz \to \exists uRuz)$
$\forall y(\exists zRyz \to Py)$	$\forall z(\exists yRxy \to Px)$
$\exists x(Px \wedge \forall yRyx)$	$\exists y(Py \wedge \forall xRxy)$
$\forall x \exists yRxy \to \exists xPx$	$\forall y \exists zRyz \to \exists wPw$

Comment

A feladat az volt, hogy a logikai következmény fogalma DEFINÍCIÓJÁNAK segítségével vizsgáljuk a helyességet. Végső cél az, hogy a számítógép döntsön a helyességről. Jelen esetben tehát nem elfogadhatóak a különböző ötletszerű ”okoskodások” a következtetésről.

A **logikai következmény** fogalma ($\models$) a logika centrális fontosságú fogalma. Ráépül a formalizálás és az igazság értékelés fogalmára. Fontos érteni, hogy a logikai következmény *nem tartalmaz már jelentést.* Ez már egy absztrakt fogalom. Egy helyes logikai következményt arra használunk, hogy igaz állításokra alkalmazva, további igaz állításokat nyerjünk.