Elméleti számítástudomány

Matematikai logika. 2024. márc. 27

1. Formalizálja az adott $\mathcal{L}$ nyelven a következőket:

a) (5) Minden természetes számnak van közvetlen rákövetkezője $\mathcal{L}$: $<$

b) (5) Minden halmazhoz van olyan halmaz, amelyik pontosan a hatványhalmaz $\mathcal{L}$: $\in$

M. a) $\forall x \exists y(x < y \wedge \neg \exists z(x < z \wedge z < y))$

b) $\forall x \exists y(\forall z(z \in y \leftrightarrow z \subset x))$, ahol $z \subset x$ a $\forall u(u \in z \to u \in x)$ formula rövidítése.

2. a) (5) Formalizálja az alábbi *következtetést* (következményt) az adott $\mathcal{L}$ nyelven: "Csak olyasvalaki *tölthet be* bizalmi állást, aki *megvesztegethetetlen*. Aki nem tölthet be bizalmi állást, az nem *folyamodik* ilyen állásért. Léteznek intelligens *politikusok*. Az, hogy valaki *intelligens*, még nem garantálja azt, hogy megvesztegethetetlen. Tehát vannak olyan politikusok, akik nem folyamodnak bizalmi állásért." ($\mathcal{L}$: Tx, Mx, Fx, Px, Ix)

b) (5) Vizsgálja rezolúcióval, hogy helyes-e a következtetés. Alkalmazható-e SLD rezolúció? Ha igen, akkor alkalmazza.

M. a) $\{\forall x(Mx \to Tx), \forall x(\neg Tx \to \neg Fx), \exists x(Px \wedge Ix), \exists x(Ix \wedge \neg Mx)\} \models \exists x(Px \wedge \neg Fx)$

b) Az SLD nem alkalmazható. Erre két indoklás is adható. Egyrészt formailag még nem alkalmas erre. Másrészt, az SLD már a Skolem normálformából indul ki, tehát az igazi kérdés az, hogy a Skolem normálforma alkalmas-e SLD-re. Be kell vezetni egy új atom formulát az $Nx := \neg Fx$-t. Azonban Mx még ekkor sem elégíti ki az SLD követelményeket.

Tehát az általános rezolúció: negálva a következményt, a Skolem normálformákból kiindulva és szeparálva a klózokat

$$\begin{array}{lllll}
\neg Mx \vee Tx & & & & \\
Ty \vee \neg Fy & & & \rceil & Ta \\
Pa & \rceil & Fa & \rfloor & y/a \\
Ia & | & & & \\
Ib & | & & & \\
\neg Mb & | & & & \\
\neg Pz \vee Fz & \rfloor & z/a & &
\end{array}$$

Látható, hogy az üres klóz nem levezethető, ezért a következtetés helytelen

3. a) (5) Hozza prenex, majd erős Skolem alakra a következő formulát:

$$\forall x(Rxy \vee \rceil \forall y Sy) \to (\exists y Sy \wedge \forall z Sz).$$

b) (5) Robinson algoritmussal vizsgálja, hogy illeszthető-e a következő két atomi formula:

$$R(g(h(a,x),x),x) \text{ és } R(y,g(a,y))$$

ahol g és h kétváltozós függvények és "a" konstans.

M. a) $\forall x(Rxy \vee \rceil \forall ySy) \to (\exists ySy \wedge \forall zSz) \Leftrightarrow \neg\forall x(Rxy \vee \rceil \forall ySy) \vee (\exists ySy \wedge \forall zSz) \Leftrightarrow$
$\exists x(\neg Rxy \wedge \forall ySy) \vee (\exists ySy \wedge \forall zSz) \Leftrightarrow \exists x\forall u\exists v\forall z((\neg Rxy \wedge Su) \vee (Sv \wedge Sz)) \Leftrightarrow$
$\exists x\forall u\exists v\forall z((\neg Rxy \vee Sv) \wedge (\neg Rxy \vee Sz) \wedge (Su \vee Sv) \wedge (Su \vee Sz)) \Leftrightarrow$
$\forall u\forall z((\neg RXy \vee SVu) \wedge (\neg RXy \vee Sz) \wedge (Su \vee SVu) \wedge (Su \vee Sz))$,
ahol X Skolem konstans, Vu Skolem függvény.
Megj. A formulában y első előfordulása szabad, itt y-t nem lehet átjelölni.
b) 1. lépés a $y/$g(h(a,x),x) helyettesítés

2. lépés a $x/$g(a,g(h(a,x),x)). Ez utóbbi viszont nem megengedett helyettesítés, mert x-be nem lehet őt tartalmazó termet helyettesíteni. Így a két kifejezés nem illeszthető.

4. (10) Vizsgálja rezolúcióval az alábbi következmény helyességét:
$\{\forall x\forall y(Px \wedge Py \to Sxy),\ \forall xRx,\ \forall xQx\} \models \exists x\forall u\forall v((Qx \wedge \neg Pu) \vee (Rx \wedge \wedge\neg Pv) \vee Svv)$
M. A premisszák klóz alakjai: $\neg Px \vee \neg Py \vee Sxy, Rx, Qx$
A konklúzió negáltjának klóz alakját Skolem formára hozással határozzuk meg:
$\neg\exists x\forall u\forall v((Qx \wedge \neg Pu) \vee (Rx \wedge \neg Pv) \vee Svv) \Leftrightarrow$
$\forall x\exists u\exists v(\neg(Qx \wedge \neg Pu) \wedge \neg(Rx \wedge \neg Pv) \wedge \neg Svv) \Leftrightarrow$
$\forall x\exists u\exists v((\neg Qx \vee Pu) \wedge (\neg Rx \vee Pv) \wedge \neg Svv) \Leftrightarrow$
$\forall x((\neg Qx \vee PUx) \wedge (\neg Rx \vee PVx) \wedge \neg SVxVx)$ ahol Ux és Vx Skolem függvények.
Ezután már felírhatjuk a cáfolandó klóz halmazt, szeparálva a klózokat:

$$\begin{array}{lllllllll}
\neg Px \vee \neg Py \vee Sxy & & &]_{x/y} & \neg Py \vee Syy & \rceil & SVs\,Vs & \rceil & \Box \\
Ru & \rceil & PVs & & & \rfloor & {\scriptstyle y/Vs} & | & \\
Qv & | & & & & & & | & \\
\neg Qz \vee PUz & | & & & & & & | & \\
\neg Rs \vee PVs & \rfloor & {\scriptstyle u/s} & & & & & | & \\
\neg SVtVt & & & & & & & \rfloor & {\scriptstyle s/t}
\end{array}$$

Az üres klóz levezethető, tehát a következmény helyes.

Megj. $\neg Px \vee \neg Py \vee Sxy$ -nél nem lehet $\neg Px$ vagy $\neg Py$ -t külön rezolválni, előbb illesztés szükséges.

5. a) (5) Fogalmazza meg Gödel I. inkomplettségi tételét
b) (5) Mit értünk egy $\mathcal{A}$ struktúra elméletén, azaz Th$\mathcal{A}$-n?

M.
a) A Π elmélet és bármely axiomatizálható és ellentmondástalan kiterjesztése inkomplett.
b) Th$\mathcal{A}$ a struktúra nyelvén megfogalmazható, az $\mathcal{A}$ struktúrán *igaz* zárt formulák (állítások) összessége.