Elméleti számítástudomány
Matematikai logika, Minta zh. Megoldások

1. Fogalmazza meg, majd formalizálja elsőrendű formulával, az *adott* $\mathcal{L}$ *elsőrendű nyelven* a következő tulajdonságokat:

a) (5p) Az $f(x)$ valós függvénynek az $x = 2$ helyen lokális maximuma van (azaz, $f(2)$ a legnagyobb érték valamely $(2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$ intervallumban)

b) (5p) f felülről korlátos, de nincs maximuma.

($\mathcal{L}$: $f, 2, +, -, \leq$)

M. a) $\exists\varepsilon\forall x(2-\varepsilon \leq x \wedge x \leq 2+\varepsilon \rightarrow fx \leq f2)$

b) $\exists K\forall x(fx \leq K) \wedge \neg\exists y\forall x(fx \leq fy)$

2. (10) Vizsgálja rezolúcióval, hogy *azonosan igaz-e* a következő formula?

$$(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Qx).$$

M. A formula negációjáról kell megmutatni, hogy kielégíthetetlen.

$\neg((\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Qx)) \Leftrightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx) \wedge \neg\forall x(Px \rightarrow Qx) \Leftrightarrow$

$(\exists x\neg Px \vee \forall x Qx) \wedge \exists x(Px \wedge \neg Qx) \Leftrightarrow \exists x\exists z\forall y((\neg Px \vee Qy) \wedge (Pz \wedge \neg Qz))$ ez a prenex forma.

Skolem forma: $(\neg Pa \vee Qy) \wedge (Pb \wedge \neg Qb)$, ahol a és b konstansok.

$$\begin{array}{cll} \neg Pa \vee Qy & \rceil & \neg Pa \\ Pb & | & \\ \neg Qb & \rfloor & {\scriptstyle y/b} \end{array}$$

Az üres klóz nem vezethető le, ezért a formula nem azonosan igaz.

3. a) (5p) Σ egy *véges* elsőrendű formulahalmaz $\mathcal{L}$ -ben és α egy tetszőleges elsőrendű formula $\mathcal{L}$-en, ahol $\mathcal{L}$ egyenlőség mentes elsőrendű nyelv. Elsőrendű rezolúciót alkalmazunk a $\Sigma \models \alpha$ következmény helyességének vizsgálatára. El dönthető-e az eljárás? Állítását indokolja!

b) (5p) Igazolja rezolúcióval, hogy a β formula *független* az $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$ és $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ állítás formulák együttesétől!

M. a) Az eljárás nem eldönthető, mert a helyettesítések újabb helyettesítéseket generálhatnak, így az eljárás nem feltétlenül ér véget.

b) A függetlenség definíciója értelmében azt kell megmutatni, hogy sem β sem $\neg\beta$ nem vezethető le a két állítás formulából. A formulák klóz alakjai, rendre $((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$, illetve $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Tehát azt kell meggondolni, hogy a $\{(\alpha \vee \gamma), (\beta \vee \gamma), \alpha\}$ klózhalmazhoz akár $\neg\beta$-t akár β-t vesszük hozzá, az üres klózt nem lehet levezetni. Ez viszont nyilvánvaló.

4. (10) Alkalmazható-e SLD rezolúció a következő következmény helyességének vizsgálatára? Ha igen, akkor alkalmazza, ha nem, akkor alkalmazzon általános rezolúciót:

$$\forall x(Lx \wedge Ax) \models \exists x(\exists y(Ly \wedge Fxy) \to \exists y(Ay \wedge Fxy)).$$

M. A baloldal tulajdonképpen két tényklóz konjunkciója, tehát alkalmas SLD-re. A jobboldal viszont nem $\exists(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ alakú, tehát SLD nem alkalmazható az egész következmény vizsgálatára.

Alkalmazzunk általános rezolúciót. Negáljuk a jobb oldalt.

$\neg(\exists x(\exists y(Ly \wedge Fxy) \to \exists y(Ay \wedge Fxy))) \Leftrightarrow \forall x(\exists y(Ly \wedge Fxy) \wedge \neg\exists y(Ay \wedge Fxy)) \Leftrightarrow$

$\forall x(\exists y(Ly \wedge Fxy) \wedge \forall y(\neg Ay \vee \neg Fxy)) \Leftrightarrow \forall x \exists y \forall z((Ly \wedge Fxy) \wedge (\neg Az \vee \neg Fxz))$

Ez a prenex forma.

A Skolem forma: $\forall x \forall z((LYx \wedge FxYx) \wedge (\neg Az \vee \neg Fxz))$.

Figyelembe véve a következtetés bal oldalát is és szeparálva a klózokat, ezt kapjuk:

$$\begin{array}{ccccc}
Lu & & & & \\
Av & \rceil & \neg Ftz & \rceil & \square \\
LYx & | & & | & \\
FyYy & | & & \rfloor & {\scriptstyle t/y,z/Yy} \\
\neg Az \vee \neg Ftz & \rfloor & {\scriptstyle v/z} & &
\end{array}$$

Tehát a következmény helyes.

5. a) (5) Fogalmazza meg azt a tételt, amelyik megválaszolja a korrekt válasz problémát:

b) (5) Mi a különbség a $\vDash$ és $\to$ fogalmak között?

M: a) Ha az SLD-nél vizsgált szokásos $\Sigma \models \exists x_1 \ldots \exists x_s(B_1 \wedge B_2 \ldots \wedge B_n)(x_1, \ldots x_s)$ elsőrendű következmény helyes, akkor léteznek a Herbrand bázisnak olyan $t_1, \ldots t_s$ elemei, hogy $\Sigma \models (B_1 \wedge B_2 \ldots \wedge B_n)(t_1, \ldots t_s)$ is teljesül.

b) $\alpha \vDash \beta$ reláció, $\alpha \to \beta$ egy művelet.