Az 1. házi feladat megoldásai, megjegyzések és Comment

319/10

Adjon meg olyan valós sorozatokat, amelyek rendre kielégítik a következő tulajdonságokat:

a) $\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \rightarrow \exists N(TN \wedge \forall n(Tn \wedge |a(n) - A| < \varepsilon \rightarrow n > N)))$

M. Nem létezik a tulajdonságot kielégítő sorozat, hiszen indirekt, ha lenne ilyen, akkor például az $|a(1) - A|$ értéknél nagyobb ε-ra $1 > N$ hamis, így az egész formula hamis.

Ha $n \geq N$ lenne a formula végén, akkor minden sorozat kielégítené a tulajdonságot $N = 1$ választással. De például az $n \geq N$ esetben minden monoton sorozat is megfelelő, alkalmas N választással.

b) $\exists N\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \wedge TN \wedge \forall n(Tn \wedge n > N \rightarrow |a(n) - A| < \varepsilon)))$

M. A tulajdonság pontosan annak definíciója, hogy egy sorozat, bizonyos indextől kezdve konstans. Ezért természetesen bármely konstans sorozat kielégíti, pl. az 1,1,1,1,1,...

320/17/e. "Nincs olyan gyerek, aki valami olyat tudna, amit valamely felnőtt ne tudna" (Gx, Txy, Fx)

M. $\neg\exists x(Gx \wedge \exists y(Txy \wedge \forall z(Fz \rightarrow \neg Tzy)))$

Megj. Sokszor könnyebb az állítás tagadását formalizálni. Ha ezzel készen vagyunk, akkor csak negálni kell az egészet.

320/17/f

M. $\exists x((Lx \wedge Tx) \wedge \forall y(Ly \wedge Ty \rightarrow x = y))$

320/17/g

M. $\forall x(Cx \rightarrow \exists y(Ly \wedge \neg Ixy))$

Megj. f-nél fontos az $=$ használata. Az elsőrendű nyelveknél az $=$ alapjel, tehát használhatjuk. A $\neq$ -t $\neg =$ -vel fejezzük ki.

g-t úgy értjük, hogy *semelyik* cipő sem illik minden lábra. Tehát nem úgy, hogy van olyan cipő, amelyik nem illik minden lábra!

322/22/a Formalizáljuk a következő tulajdonságot az adott nyelven:

"A számegyenesen értelmezett f valós függvény értékkészelete egy zárt valós intervallum"

M: Használjuk az $f, \leq$ elsőrendű nyelvet.

$\exists c\exists d(\forall x(c \leq fx \leq d) \wedge \forall y(c \leq y \leq d \rightarrow \exists x(y = fx))$

Megj. Minél egyszerűbb és elsőrendű nyelvet használjunk.Figyeljünk a zárójelezésre. Mindkét részformula szükséges a formalizálásnál.

322/22/b

M. $\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \rightarrow \exists N(TN \wedge \forall n(Tn \wedge n > N \rightarrow |a(n) - A| < \varepsilon)))$

322/22/c

M. $\forall n\exists m(n = a(m) \wedge \forall k(n = a(k) \rightarrow k = m)) \wedge \forall kTa(k))$.

Megj. b-t a valós számok halmazán interpretáljuk, ezért a Vx valós tulajdonság nem szükséges a formalizáláshoz, elég a Tx

Fontos figyelni a zárójelezésre is, a kvantorok hatáskörére. c-nél például fontos, $\forall n$ és $\exists m$, és hogy ne keletkezzenek szabad változók.

Comment

Fontos feladat típusa a kurzusnak a formalizálás. A formális nyelv fogalma teszi ma lehetővé a matematika számítógépre vitelét, computerizálását. Az elsőrendű nyelv, amelyről tanulunk, tulajdonképpen egy programozási nyelvnek is tekinthető, melynek segítségével a matematika számítógépbe programozható. Talán ez a lehető legfontosabb programozási nyelv, hiszen ez a nyelv nem változik (mint a divatos programozási nyelvek), ráadásul az elsőrendű nyelv minden tudományban jelen van. Azt a gondolatot, hogy a matematika nyelve tulajdonképpen egy programozási nyelv, a logikai, valamint a funkcionális programozás kutatásánál fejlesztették tovább. A matematika nagyon érzékeny arra, hogy pontosan milyen nyelvet használunk: állítás-, elsőrendű-, vagy másodrendű, stb. nyelvet.