Yang–Mills-elmélet gravitációs insztantonok felett

Etesi Gábor

BME TTK Geometria Tanszék
Egyetemi docensi pályázati előadás

Budapest, 2009. március 20.

Mi az a Yang–Mills-elmélet?

Legyen (M, g) egy 4 dimenziós irányított Riemann-sokaság, G egy Lie-csoport, (E, ∇) pedig egy kompatibilis kovariáns deriválással ellátott G-hez tartozó vektornyaláb M felett.

Definíció

Az (M, g, G, E, ∇) ötöst egy G-hez tartozó M feletti Yang–Mills-elméletnek nevezünk.

Létezik egy természetes hatásfunkcionál a kovariáns deriválások terén (M, g) felett:

$$\nabla \longmapsto \|F_\nabla\|^2_{L^2(M,g)} := -\frac{1}{8\pi^2}\int_M \mathrm{tr}(F_\nabla \wedge *F_\nabla)$$

(F_∇ az ∇ *görbületi tenzor*a, $*$ pedig a g által indukált *Hodge-operáció*.)

A ∇-ra vonatkozó *Bianchi-azonosság* és a hatásfunkcionálhoz tartozó *Euler–Lagrange-egyenlet* adják a (vákuum) Yang–Mills-egyenleteket:

$$\mathrm{d}_\nabla F_\nabla = 0, \quad \mathrm{d}_\nabla * F_\nabla = 0.$$

Definíció

A ∇ kovariáns deriválás E-n egy Yang–Mills-(anti)insztanton, ha

(i) $*F_\nabla = \pm F_\nabla$ (vagyis görbülete (anti)önduális);

(ii) $\|F_\nabla\|^2_{L^2(M,g)} < +\infty$ (ez a véges szám az (anti)insztanton energiája).

Jelölje $\mathscr{M}(e)$ az $e \in \mathbb{R}^+$ energiájú inekvivalens megoldások összességét, ez a megoldások modulustere.

Példa

Legyen $M = \mathbb{R}^4$ a sokaság, $g = g_0$ a triviális lapos metrika és $G = \mathrm{SU}(2)$ a csoport, $E = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}^2$ a vektornyaláb. Ekkor

(i) Ha $e = 0$ akkor az egyetlen megoldás az

$$\nabla = \mathrm{d}$$

lapos kovariáns deriválás és $\mathscr{M}(0) \cong \{\text{egy pont}\}$.

(ii) Ha $e = 1$ akkor az $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$ azonosítással minden $(y, \lambda) \in \mathbb{H} \times (0, +\infty)$ párhoz tartozik egy

$$\nabla_{y,\lambda} = \mathrm{d} + \mathrm{Im}\frac{(x-y)\mathrm{d}\overline{x}}{\lambda^2 + |x-y|^2}$$

insztanton és $\mathscr{M}(1) \cong \mathbb{R}^4 \times (0, +\infty)$ (Belavin, et al. 1975, Atiyah et al. 1978).

Megjegyzés

(i) Amennyiben $G \cong \mathrm{U}(1)$, az elektrodinamika, ha $G \cong \mathrm{SU}(2)$ akkor a gyenge kölcsönhatás, ha pedig $G \cong \mathrm{SU}(3)$, akkor az erős kölcsönhatás matematikai modelljét kapjuk.

(ii) Mivel $*^2 = \mathrm{Id}_{\Lambda^2 M}$, a Yang–Mills-(anti)insztantonok a téregyenletek speciális megoldásai, melyek lokálisan minimalizálják a hatásfunkcionált.

(iii) Viszont az $*F_\nabla = \pm F_\nabla$ egy nemlineáris elsőrendű parciális differenciál-egyenlet ∇-ra, melynek megoldása nehéz.

(iv) *Matematikailag* e megoldások modulustereinek (melyek véges dimenziós sokaságok) megértése forradalmi áttörést hozott a 4-sokaságok elméletében (Donaldson, 1982). *Fizikailag* az (anti)insztantnok az indukált kvantum-Yang–Mills-elmélet vákuumának leírásában fontosak.

Mik azok a gravitációs insztantonok?

Legyen (M, g) egy Riemann n-sokaság és jelölje $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{O}(n)$ a holonómia-csoportját. A holonómia-csoport egy Lie-csoport és a sokaság görbületi viszonyainak tömör összefoglalása: ha pl. egyszerűen $M = \mathbb{R}^n$ és $g = g_0$ a szokásos lapos metrika rajta, akkor $\mathrm{Hol}(g_0) \cong 1$. Minél általánosabb M és rajta a g metrika, $\mathrm{Hol}(g)$ annál "kövérebb".

Ha $\dim M = 4$, akkor M. Berger 1955-ös eredménye alapján

$$\mathrm{Hol}(g) \cong 1,\ \ \mathrm{SU}(2),\ \ \mathrm{U}(2),\ \ \mathrm{SO}(4),\ \ \mathrm{O}(4)$$

lehet csak.

Definíció

Egy teljes (M, g) Riemann 4-sokaságot, melyre $\mathrm{Hol}(g) \subseteq \mathrm{SU}(2)$, hiper-Kähler 4-sokaságnak, vagy fizikus terminológiával (szűkebb értelemben vett) gravitációs (anti)insztantonnak nevezünk.

Megjegyzés

(i) Egy *tágabb értelemben vett gravitációs (anti)insztanton* egyszerűen egy teljes Ricci-lapos 4-sokaság.

(ii) Egy gravitációs (anti)insztanton aszimptotikusan lokálisan lapos, ha a végtelenben úgy néz ki, mint az Euklideszi Schwarzschild-sokaság.

(iii) *Matematikailag*—a Berger-lista alapján—a gravitációs (anti)insztantonok a legegyszerűbb nem lapos 4-sokaságok. *Fizikailag* (M, g) Ricci-lapos, tehát teljesíti a vákuum Einstein-egyenleteket, sőt, görbülete (anti)önduális: $*R_\nabla = \pm R_\nabla$. Emiatt lokálisan minimalizálja a gravitációs pályaintegrált (kvantumgravitáció!).

Példa

(i) Triviális példa $\mathbb{R}^4$ a lapos metrikával.

(ii) Kevésbé egyszerű az un. aszimptotikusan lokálisan lapos Gibbons–Hawking-tér (Gibbons–Hawking, 1978). Ez egy természetes g metrika az

$$xy - (z - p_1) \dots (z - p_s) = 0$$

egyenlettel adott $M \subset \mathbb{C}^3$ algebrai felületen ($(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ és $p_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, s$). Ha M irányítása természetes, akkor a Gibbons–Hawking-tér egy gravitációs antiinsztanton.
M előáll, mint egy $\mathbb{R}^3$ feletti szinguláris S^1-fibrálás, és ezek az S^1-fibrumok a Gibbons–Hawking-tér izometria-csoportjának orbitjai, p_i-k ($i = 1, \dots, s$) a fixpontok.

SU(2) Yang–Mills-(anti)insztanton modulusterek gravitációs insztantonok felett

Kérdés

Ha adott egy (M, g) aszimptotikusan lokálisan lapos gravitációs (anti)insztanton, rajta egy SU(2) Yang–Mills-elmélet, akkor mennyi az inekvivalens e energiájú Yang–Mills (anti)insztantonok modulusterének dimenziója? Vagyis

$$\dim \mathscr{M}(e) = ?$$

Tétel

(Etesi–Jardim, 2006) Legyen (M, g) egy (tágabb értelemben vett) aszimptotikusan lokálisan lapos gravitációs (anti)insztanton. Legyen $\mathscr{M}(e, \Gamma)$ az e energiájú, a végtelenben gyorsan a ∇_Γ lapos kovariáns deriváláshoz konvergáló inekvivalens irreducibilis $SU(2)$ Yang–Mills insztantonok modulustere.
Ekkor ha $\mathscr{M}(e, \Gamma)$ nem üres, akkor egy sokaság és

$$\dim \mathscr{M}(e, \Gamma) = 8\left(e + \tau_N(\Theta_\infty) - \tau_N(\Gamma_\infty)\right) - 3b^-(X).$$

Itt $\tau_N(\Theta_\infty)$, $\tau_N(\Gamma_\infty)$ bizonyos 3-sokaság-invariánsok (Chern–Simons-invariánsok) és X egy kompakt, perem nélküli irányított sima 4-sokaság (az M un. Hausel–Hunsicker–Mazzeo kompaktifikációja), $b^-(X)$ pedig X metszetformája negatív definit részének a rangja.

Bizonyítás

L^2-kohomológia-elmélet és az Atiyah–Singer indextétel Gromov–Lawson-féle relatív változatának segítségével. $\diamond$

Példa

(i) A Gibbons–Hawking-tér felett a $\nabla_\Gamma = \nabla_\Theta$ triviális lapos kovariáns deriváláshoz konvergáló $e = 1$ energájú SU(2) Yang–Mills antiinsztantonokra

$$\dim \mathscr{M}(1, \Theta) = 8.$$

(ii) Ha egy triviális SU(2) ekvivalenciával elosztunk, akkor az un. tüskézetlen modulustérre

$$\dim \widehat{\mathscr{M}}(1, \Theta) = 5.$$

($\mathscr{M}(e, \Gamma)$ egy SU(2)-nyaláb $\widehat{\mathscr{M}}(e, \Gamma)$ felett.)

SU(2) Yang–Mills antiinsztantonok a Gibbons–Hawking-téren

Feladat

Írjuk le expliciten az $\widehat{\mathscr{M}}(1, \Theta)$ teret a Gibbons–Hawking geometria felett! Ez a legegyszerűbb nem triviális modulustér. (Hasonló modulusterek vizsgálata: Cherkis 2008,2009, Witten 2009.)

A konform átskálázás módszere (Jackiw-Nohl-Rebbi, 1975, Atiyah–Hitchin–Singer, 1978): legyen (M, g) egy gravitációs (anti)insztanton, tekintsük a hozzá tartozó $\triangle_g$ Laplace-operátort és jelölje $G(\cdot, y)$ ennek $y \in M$-ben szinguláris Green-függvényét; továbbá legyen $\lambda \in (0, +\infty)$ valós paraméter! Ekkor létezik egy

$$1 + \lambda G(\cdot, y) \longmapsto \nabla_{y,\lambda}$$

hozzárendelés (explicit konstrukció), ahol $\nabla_{y,\lambda}$ egy egységnyi energiájú SU(2) Yang–Mills antiinsztanton, mely a végtelenben gyorsan lecseng a ∇_Θ triviális lapos kovariáns deriváláshoz. Ezáltal megkapjuk az $\widehat{\mathscr{M}}(1, \Theta)$ modulustér egy darabját, melyet $(y, \lambda) \in M \times (0, +\infty)$ paraméterez.
De vannak $\lambda = +\infty$ megoldások is! Ezeket is figyelembe véve:

Tétel

(Etesi–Szabó Sz., 2008) Az $\widehat{\mathscr{M}}(1,\Theta)$ tér előáll, mint

$$M \times (0,+\infty]/\sim$$

ahol $\sim$ azt jelenti, hogy az $M \times \{+\infty\} \subset M \times (0,+\infty]$ szeletet összeomlasztjuk egy $\mathbb{R}^3$-má az (M,g) Gibbons–Hawking-tér S^1-gyel diffeomorf izometria-orbitjainak pontrahúzásával. Az így előálló 5 dimenziós $\widehat{\mathscr{M}}(1,\Theta)$ tér egy sokaság s darab pont kivételével, ahol is e térnek "összezárt esernyőszerű" szingularitásai vannak.

Bizonyítás

Tvisztor-elméleti, algebrai geometriai konstrukció. $\diamond$

Végtelen dimenziós Lie-csoportok reprezentációi

Az $\mathscr{M}(e,\Gamma)$ terek geometriai kvantálásával bizonyos végtelen dimenziós Lie-csoportok (un. kettős hurokcsoportok) végtelen dimenziós irreducibilis reprezentációi is tanulmányozhatók (Braverman et al., 2007, Witten 2007).