Legyen $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$. Az A és B multiplikatív komplementumok (MK), ① ha $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ felírható $n = a \cdot b$, $a \in A$, $b \in B$ alakban.

Legyen $A(x) = \#\{a : a \leq x,\ a \in A\}$, $B(x) = \#\{b : b \leq x,\ b \in B\}$, $x \in \mathbb{Z}^+$.

<u>1. Megj.</u> Ha A és B MK, akkor $A(x)B(x) \geq x$ $\forall x \in \mathbb{Z}^+$.

<u>1. Tétel</u> Tegyük fel, hogy $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, $|A| = |B| = +\infty$. Ekkor

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)B(x)}{x} = +\infty.$$

<u>Bi.</u> $1 = 1 \cdot 1 \Rightarrow 1 \in A \cap B$.

Legyen P a prímszámok halmaza. Ha $p \in P$, akkor $p = 1 \cdot p \Rightarrow$

$$p \in A \cup B \Rightarrow P \subseteq A \cup B \Rightarrow A(x) + B(x) \geq \pi(x) \Rightarrow \max\{A(x), B(x)\} \geq \frac{\pi(x)}{2}.$$

Tegyük fel, hogy $A(x) \geq \frac{\pi(x)}{2} = (0{,}5 + o(1)) \frac{x}{\log x}$.

Ha $B(x) \geq \log^2 x \Rightarrow A(x)B(x) \geq (0{,}5 + o(1))\, x \log x$.

Ha $B(x) < \log^2 x$, akkor

$$x = \#\{n : n \leq x\} \leq$$
$$\#\{n : n \leq x,\ \exists a \in A,\ b \in B,\ b \geq B^2(x),\ n = a \cdot b\} +$$
$$\#\{n : n \leq x,\ \exists a \in A,\ b \in B,\ 1 < b < B^2(x),\ n = ab\} +$$
$$\#\{n : n \leq x,\ \exists a \in A,\ n = a \cdot 1\}.$$

$$\#\{n : n \leq x,\ \exists a \in A,\ b \in B,\ b \geq B^2(x),\ n = a \cdot b\} \leq \sum_{B^2(x) \leq b \leq x} \frac{x}{b} \leq$$

$$\frac{x}{B^2(x)} \cdot B(x) = \frac{x}{B(x)}.$$

$$\#\{n : n \leq x,\ \exists a \in A,\ b \in B,\ 1 < b < B^2(x),\ n = ab\} \leq$$
$$\#\{n : n \leq x,\ \exists d,\ 1 < d < B^2(x),\ d \mid n\}.$$

$$\#\{n : n \leq x,\ \exists a \in A,\ n = a \cdot 1\} = A(x).$$

Így $x \le \frac{x}{B(x)} + \#\{n : n \le x, \exists d,\ 1 < d < B^2(x),\ d \mid n\} + A(x)$, azaz

$x - \#\{n : n \le x, \exists d,\ 1 < d < B^2(x),\ d \mid n\} - \frac{x}{B(x)} \le A(x)$, tehát

$\#\{n : n \le x,\ p \mid n,\ p \in P \Rightarrow p \ge B^2(x)\} - \frac{x}{B(x)} \le A(x)$.

Jelölje $\gamma = 0{,}5772..$ az Euler–Mascheroni állandót. Ismert, hogy $B^2(x) = x^{o(1)}$ miatt

$$\#\{n : n \le x,\ p \mid n,\ p \in P \Rightarrow p \ge B^2(x)\} = (1 + o(1)) \cdot \prod_{p < B^2(x)} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot x =$$

$$\frac{e^{-\gamma} + o(1)}{\log B^2(x)} \cdot x,$$

így $(0{,}5 e^{-\gamma} + o(1)) \cdot \frac{x}{\log B(x)} - \frac{x}{B(x)} \le A(x)$, azaz

$$(0{,}5 e^{-\gamma} + o(1)) \frac{x}{\log B(x)} \le A(x),$$

tehát

$$(0{,}5 e^{-\gamma} + o(1)) \cdot \frac{B(x)}{\log B(x)} \cdot x \le A(x) B(x).$$

Mivel $\log x \to \infty$, $\frac{B(x)}{\log B(x)} \to \infty$, ezért készen vagyunk. $\blacksquare$

A fenti bizonyításból az alábbi tétel adódik.

2. Tétel Tfh $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$, MK, $|A| = |B| = +\infty$. Ekkor

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\} \cdot \log \min\{A(x), B(x)\}}{x} \ge 0.5$$

Biz $1 \in A \cap B$. Tfh $x \in \mathbb{Z}^+$, $A(x) \le B(x)$.

$x = \#\{n : n \le x\} \le \#\{n : n \le x, \exists a \in A, b \in B, b > B(x) \log^2 B(x), n = ab\} +$

$\#\{n : n \le x, \exists a \in A, b \in B, 1 < b < B(x) \log^2 B(x), n = ab\} +$

$\#\{n : n \le x, \exists a \in A, n = a \cdot 1\}$

$\#\{n: n\le x,\ \exists a\in A,\ b\in B,\ b\ge B(x)\log^2 B(x),\ n=a\cdot b\}\le$

$$\sum_{B(x)\log^2 B(x)\le b\le x}\frac{x}{b}\le\frac{x}{B(x)\log^2 B(x)}\cdot B(x)=\frac{x}{\log^2 B(x)}.$$

$\#\{n: n\le x,\ \exists a\in A,\ b\in B,\ 1<b<B(x)\log^2 B(x),\ n=a\cdot b\}\le$

$\#\{n: n\le x,\ \exists d,\ 1<d<B(x)\log^2 B(x),\ d|n\}.$

$\#\{n: n\le x,\ \exists a\in A,\ n=a\cdot 1\}=A(x).$

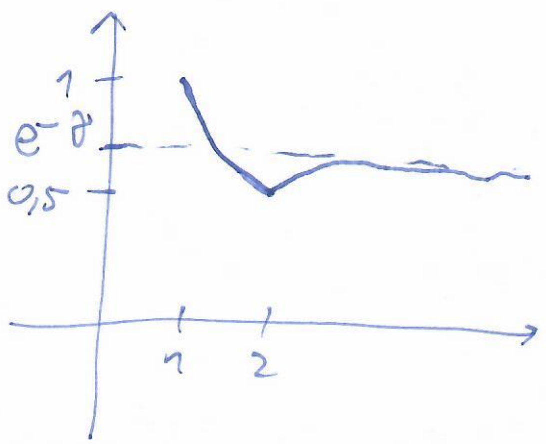
Így $x-\#\{n: n\le x,\ \exists d,\ 1<d<B(x)\log^2 B(x),\ d|n\}-\dfrac{x}{\log^2 B(x)}\le A(x)$,

azaz $\#\{n: n\le x,\ p|n,\ p\in P\Rightarrow p>B(x)\log^2 B(x)\}-\dfrac{x}{\log^2 B(x)}\le A(x).$

Buchstab függvény: $\omega(x)$, $x\ge 1$:

$\omega(u)=\frac{1}{u}$ ha $1\le u\le 2$

$\frac{d}{du}(\omega(u)\cdot u)=\omega(u-1)$ ha $u>2$



$\lim_{u\to\infty}\omega(u)=e^{-\gamma}$

Globális minimum van $u=2$-ben,

$\omega(2)=0{,}5.$

Ismert, hogy ha $y\to\infty$ amint $x\to\infty$, $y\le x$, akkor

$\#\{n: n\le x,\ p|n,\ p\in P\Rightarrow p\ge y\}=\left(\omega\left(\frac{\log x}{\log y}\right)+o(1)\right)\cdot\frac{x}{\log y}.$

Így $\left(\omega\left(\frac{\log x}{\log(B(x)\log^2 B(x))}\right)+o(1)\right)\cdot\frac{x}{\log(B(x)\cdot\log^2 B(x))}-\frac{x}{\log^2 B(x)}\le A(x)$,

azaz $\left(\omega\left(\frac{\log x}{\log B(x)}\right)+o(1)\right)\frac{x}{\log B(x)}\le A(x)$, tehát $(0{,}5+o(1))\frac{x}{\log B(x)}\le A(x)$

$\blacksquare$.

Az $A \subseteq \mathbb{Z}^+$ multiplikatív bázis (MB), ha $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\exists a, a' \in A$, hogy $n = a \cdot a'$. 4.

2. Megj. (Pach Péter Pál és SG, Multiplicative bases and an Erdős Problem, Theorem 4): legyen $\varepsilon > 0$. Ekkor $\exists A \subseteq \mathbb{Z}^+$ MB amire

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\log x}} < 1 + \varepsilon. \quad \text{Ekkor } A, A \text{ MK és}$$

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{A(x) \log A(x)}{x} < 1 + \varepsilon.$$

1. kérdés Igaz-e, hogy $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, amire

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\} \log \min\{A(x), B(x)\}}{x} < 0{,}5 + \varepsilon \quad ?$$

3. Megj. Ha $A = (P \cap \{1, 2, \dots, x\}) \cup \{1, 2, \dots, [x^{3/4}]\}$, $B = \{1, 2, \dots, [x^{1/2}]\}$,

akkor $$\frac{\max\{A(x), B(x)\} \log \min\{A(x), B(x)\}}{x} = \frac{(1 + o(1)) \cdot \frac{x}{\log x} \cdot \log x^{1/2}}{x} = 0{,}5 + o(1)$$

és $\forall n \le x$ esetén $\exists a \in A$, $b \in B$, amire $n = a \cdot b$, mert

- ha $\exists p \ge \sqrt{x}$, $p \mid n \Rightarrow n = p \cdot \frac{n}{p}$, ahol $\frac{n}{p} \le \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$; így $p \in A$, $\frac{n}{p} \in B$
- ha $\exists \sqrt[4]{x} \le p < \sqrt{x}$, $p \mid n \Rightarrow n = \frac{n}{p} \cdot p$, ahol $\frac{n}{p} \le \frac{x}{x^{1/4}} = x^{3/4}$ $\Rightarrow \frac{n}{p} \in A$, $p \in B$
- ha $\forall p \mid n$ esetén $p < \sqrt[4]{n}$, akkor legyen $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_k$.
  Ha $p_1 \cdots p_{i-1} < \sqrt{x}$, $p_1 \cdots p_i \ge \sqrt{x}$, akkor $\sqrt{x} \le p_1 \cdots p_i \le x^{3/4}$,
  ezért $n = (p_1 \cdots p_i) \cdot \frac{n}{p_1 \cdots p_i}$, ahol $p_1 \cdots p_i \in A$, $\frac{n}{p_1 \cdots p_i} \in B$.

2. kérdés Tfh $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, $|A| = |B| = +\infty$. Igaz-e, hogy

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\max\{A(x), B(x)\} \log \min\{A(x), B(x)\}}{x} = +\infty \quad ?$$

4. Tétel (Raikov, 1938). $\exists\, c_0>0$, hogy ha $A\subseteq \mathbb{Z}^+$ MB, akkor

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} \geq c_0 .$$

Köv Tfh $A, B\subseteq \mathbb{Z}^+$ MK. Ekkor $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{\max\{A(x), B(x)\}}{\frac{x}{\sqrt{\log x}}} \geq \dfrac{c_0}{2}$,

mert $C=A\cup B$ MB, $C(x)\leq A(x)+B(x)\leq 2\max\{A(x),B(x)\}$.

4. Tétel bit Legyen $\mathcal{A}(s)=\sum\limits_{a\in A}\dfrac{1}{a^s}$, $s>1$. Ekkor

$$\mathcal{A}^2(s)=\Big(\sum_{a\in A}\frac{1}{a^s}\Big)\Big(\sum_{a'\in A}\frac{1}{a'^s}\Big)=\sum_{\substack{(a,a')\\ a,a'\in A}}\frac{1}{(a\cdot a')^s}\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s).$$

Ismert, hogy ha $s\to 1+$, akkor $\zeta(s)=\dfrac{1}{s-1}+O(1)$, így

$\mathcal{A}(s)\geq \dfrac{1}{\sqrt{s-1}}+O(1)$ ha $s\to 1+$.

Ha $f(x)$ és $g(x)$ olyan függvények, hogy $\exists\, c_1, c_2>0$ konstansok, amikre $c_1 f(x)\leq g(x)\leq c_2 f(x)$ a minket érdeklő x-ek esetén, akkor az $f(x)\asymp g(x)$ jelölést használjuk.

Megmutatjuk, hogy $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s}\asymp \dfrac{1}{\sqrt{s-1}}$ ha $s\to 1+$. Azt kell

megmutatni, hogy $\Big(\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s}\Big)^2\asymp \dfrac{1}{s-1}$ ha $s\to 1+$.

Tudjuk $\zeta(s)\asymp \dfrac{1}{s-1}$ ha $s\to 1+$. Nyilván

$$\zeta(s)\asymp\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s}\asymp\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}+1\leq n\leq 2^k}\frac{1}{n^s}\asymp\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}+1\leq n\leq 2^k}\frac{1}{2^{ks}}\asymp\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2^{ks}}.$$

$$\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s}\Big)^2=\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{2^{k-1}+1\leq n\leq 2^k}\frac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s}\Big)^2\asymp\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty}\sum_{2^{\ell-1}+1\leq n\leq 2^\ell}\frac{\frac{1}{\sqrt{\ell}}}{2^{\ell s}}\Big)\Big(\sum_{\ell'=1}^{\infty}\sum_{2^{\ell'-1}+1\leq n\leq 2^{\ell'}}\frac{\frac{1}{\sqrt{\ell'}}}{2^{\ell' s}}\Big)$$

$$\asymp\Big(\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{2^\ell}{2^{\ell s}}\frac{1}{\sqrt{\ell}}\Big)\Big(\sum_{\ell'=1}^{\infty}\frac{2^{\ell'}}{2^{\ell' s}}\frac{1}{\sqrt{\ell'}}\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{2^{ks}}\sum_{\substack{(\ell,\ell')\\ \ell+\ell'=k}}\frac{1}{\sqrt{\ell}}\frac{1}{\sqrt{\ell'}},$$

ahol $\sum_{\substack{(\ell,\ell') \\ \ell+\ell'=k}} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \frac{1}{\sqrt{\ell'}} \overset{\smile}{\frown} \sum_{\ell=1}^{k/2} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \frac{1}{\sqrt{k}} \overset{\smile}{\frown} \frac{1}{\sqrt{k}} \int_1^{k/2} \frac{dt}{\sqrt{t}} \overset{\smile}{\frown} \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{k} = 1.$

Így $\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s}\right)^2 \overset{\smile}{\frown} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{ks}} \overset{\smile}{\frown} \zeta(s) \overset{\smile}{\frown} \frac{1}{s-1}$, azaz

$\exists\, C_1$, hogy $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s} \leq \frac{C_1}{\sqrt{s-1}}$ ha $s \to 1+$.

Legyen $2^{k-1}+1 \leq n \leq 2^k$ esetén $d_n = \frac{|A \cap [2^{k-1}+1, 2^k]|}{2^k}$.

Mivel $s \to 1+$ esetén $\sum_{2^{k-1}+1 \leq a \leq 2^k} \frac{1}{a^s} \overset{\smile}{\frown} \sum_{2^{k-1}+1 \leq a \leq 2^k} \frac{1}{2^{ks}} =$

$\frac{|A \cap [2^{k-1}+1, 2^k]|}{2^{ks}} \overset{\smile}{\frown} \sum_{2^{k-1}+1 \leq n \leq 2^k} \frac{d_n}{n^s}$ k-tól függetlenül, ezért

$\mathcal{A}(s) \overset{\smile}{\frown} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{2^{k-1}+1 \leq a \leq 2^k} \frac{1}{a^s} \overset{\smile}{\frown} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{2^{k-1}+1 \leq n \leq 2^k} \frac{d_n}{n^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n^s}.$

Tfh $\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{\frac{x}{\sqrt{\log_2 x}}} < \delta$. Akkor ha k elég nagy, akkor

$\frac{A(2^k)}{\frac{2^k}{\sqrt{\log_2 2^k}}} = \frac{A(2^k)}{\frac{2^k}{\sqrt{k}}} \leq \delta$, azaz $A(2^k) \leq \delta \cdot \frac{2^k}{\sqrt{k}}$.

Így ha n elég nagy, akkor $d_n = \frac{|A \cap [2^{k-1}+1, 2^k]|}{2^k} \leq \frac{A(2^k)}{2^k} \leq \frac{\delta}{\sqrt{k}} \leq \frac{\delta}{\sqrt{\log_2 n}}$.

$\exists\, C_2, C_3 > 0$, hogy $\mathcal{A}(s) \leq C_2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{d_n}{n^s} \leq C_2 \cdot \sqrt{\log 2} \cdot \delta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{\log n}}}{n^s} \leq$

$C_2 \cdot \sqrt{\log 2} \cdot C_3 \cdot \delta \cdot \frac{1}{\sqrt{s-1}}$, ami ellentmond annak hogy $\mathcal{A}(s) \geq \frac{1}{\sqrt{s-1}} + O(1)$,

ha $\delta < \frac{1}{C_2 C_3 \sqrt{\log 2}}$ és $s \to 1+$. ∎

3. Kérdés Legyen $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, $A(x) < C \frac{x}{(\log x)^c}$, ahol $0 < c < 1$.

Igaz-e, hogy $\limsup_{x\to\infty} \frac{B(x)}{\frac{x}{(\log x)^{1-c}}} > 0$?

Megj Ha $0 < c < 1$, $c \in \mathbb{Q}$, akkor megadható $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, hogy

$$A(x) = (a_0 + o(1)) \frac{x}{(\log x)^c}, \quad B(x) = (b_0 + o(1)) \frac{x}{(\log x)^{1-c}}.$$

Megj Az 1. Tétel nevezőjében lévő x helyére nála nagyságrendileg gyorsabban $+\infty$-be tartó függvény nem írható, mert ha $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, akkor $A = \mathbb{Z}^+$, B ritka, $1 \in B$ sorozat esetén $\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{f(x)} = 0$ teljesül és A, B MK.

5. Tétel Legyen $f(x)$ olyan függvény, melyre $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Ekkor $\exists A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, $A(x) = o(x)$, $B(x) = o(x)$ és $\liminf_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{f(x)} = 0$.

(NEM BIZ.)

6. Tétel Legyen $\varepsilon > 0$, $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$ MK, $A(x) = o(x)$, $B(x) = o(x)$. Ekkor $\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{\frac{x^2}{\log^{2+\varepsilon} x}} = +\infty$.

Biz Tudjuk: $A(x) + B(x) \geq \pi(x) \Rightarrow \max\{A(x), B(x)\} \geq \frac{\pi(x)}{2}$.

Ha $\exists y_1 < y_2 < \ldots$, $z_1 < z_2 < \ldots$ végtelen sorozatok, hogy $A(y_i) \geq \frac{\pi(y_i)}{2}$, $B(z_i) \geq \frac{\pi(z_i)}{2}$, akkor ha $y_i < z_i$ és v_i jelöli a legnagyobb olyan t egészt az $[y_i, z_i]$-ben amire $A(t) \geq \frac{\pi(t)}{2}$, akkor $A(v_i) \geq \frac{\pi(v_i)}{2} + O(1)$ és $B(v_i) = \frac{\pi(v_i)}{2} + O(1)$, így $A(v_i)B(v_i) \geq (0{,}25 + o(1)) \frac{v_i^2}{\log v_i}$ és készen vagyunk.

Így feltehető, hogy van egy x_0, hogy $x \geq x_0$ esetén $A(x) \geq \frac{\pi(x)}{2} = (0{,}5 + o(1)) \cdot \frac{x}{\log x}$.

Tfh $\limsup_{x\to\infty} \frac{A(x)B(x)}{\frac{x^2}{(\log x)^{2+\varepsilon}}} < +\infty$. Ekkor $B(x) = O\left(\frac{x}{(\log x)^{1+\varepsilon}}\right)$.

(8.)

Legyen $B: b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots$ Ekkor $n = B(b_n) = O\left(\frac{b_n}{(\log b_n)^{1+\varepsilon}}\right) = O\left(\frac{b_n}{(\log n)^{1+\varepsilon}}\right)$.

Így $n \le \frac{C \cdot b_n}{(\log n)^{1+\varepsilon}}$, azaz $b_n \geq \frac{1}{C} n (\log n)^{1+\varepsilon}$.

Így $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{b_n} \le \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{C} n (\log n)^{1+\varepsilon}} < +\infty$. Így $\exists N_0$, hogy $\sum_{\substack{b \geq N_0 \\ b \in B}} \frac{1}{b} < \frac{1}{2}$.

$x = \#\{n : n \le x\} \le \#\{n : n \le x, \exists a \in A, b \in B; b < N_0, n = a \cdot b\} +$

$\#\{n : n \le x, \exists a \in A, b \in B, b \geq N_0, n = ab\} \le$

$N_0 \cdot A(x) + \sum_{b \geq N_0} \frac{x}{b} < N_0 A(x) + \frac{x}{2}$, ami ellentmondás

mivel $A(x) = o(x)$. ∎

4. Kérdés Legyen $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$, $A(x) = o(x)$, $B(x) = o(x)$, MK. Igaz-e, hogy

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x) B(x)}{\frac{x^2}{\log^2 x}} > 0 \; ?$$

Megj. Legyen $A = \{n : p \mid n \Rightarrow p = 2 \text{ v. } p \equiv 1 \pmod 4\}$

$B = \{n : p \mid n \Rightarrow p \equiv 3 \pmod 4\}$.

Ekkor $A(x) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$, $B(x) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$, így

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x) B(x)}{\frac{x^2}{\log x}} < +\infty.$$

5. Kérdés Legyen $A, B \subseteq \mathbb{Z}^+$, MK, $A(x) = o(x)$, $B(x) = o(x)$.

Igaz-e, hogy $$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x) B(x)}{\frac{x^2}{\log x}} > 0 \; ?$$