MATEMATIKAI STATISZTIKA

Valószínűségszámítás

Bevezetés

Valószínűségszámítás tárgya: véletlen tömegjelenségek vizsgálata

Például véletlen tömegjelenségek:

1. Szabályos kockával dobunk: dobott eredménye
2. Duna vízállása a Szabadság hídnál egy márciusi napon 8 órakor
3. A Szabadság híd egy Rudi napon 14 és 15 óra közt hány autó megy át

4. A szelektor egy egyszerű lámpa (piros, sárga, zöld)

Olyan véletlen jelenségek érdekelnek, ahol a kimenetelek számok.

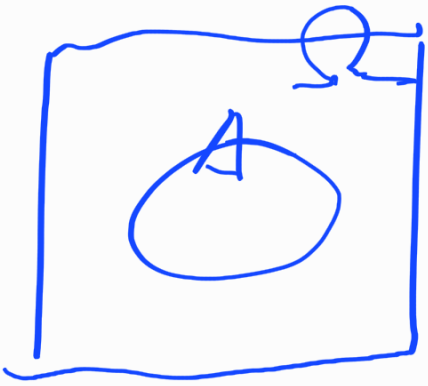
A véletlen jelenségek a lehetséges kimenetelek: események

A tovább nem bontható események: elemi események

Elemi események összessége: eseménytér

Jelölés: Ω

Az esemény az eseménytér egy részhalmaza



Pl 1. Kockadobás:

Elemi események: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Esemény: - páros számot dobunk = A

$A = \{2, 4, 6\}$

- 4-nél nagyobb számot dobunk = B = $\{5, 6\}$

Eseménytér: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Szabadnap hidnál a várakozás:

eseménytér = $\{x : x \geq 0\}$

egy esemény = $[150, 200]$

3. Szabadnap hídon áthaladó autók száma: eseménytér = $\{0, 1, 2, \ldots\}$

egy esemény: 1000-nél kevesebb autó haladt

véletlen tömegjelenség, aminek kimenetelei számok: valószínűségi változó

A v. v. diszkrét, ha fel lehet sorolni a lehetséges értékeket és folytonos, ha a lehetséges értékek beleszámítva egy intervallum, egy félegyenes vagy az összes valós szám.

Diszkrét: 1. kockadobás
3. autók száma

Folytonos: 2. vízszállítás

<u>Eseményekkel kapcsolatos fogalmak, műveletek</u>

- Biztos esemény: mindig bekövetkezik
- Lehetetlen esemény: ami soha nem következik be
- Az A esemény komplementere: $\bar{A}$ esemény, ami A tagadása, azaz akkor következik be, ha A nem

teljesül.

Pl. Kockadobás: A: páros számot dobok

$\overline{A}$: páratlan számot dobok

- az A és B eseményekből összege (A+B), akkor következik be, ha A vagy B bekövetkezik.

- az A és B események szorzata: A·B akkor következik be, ha mindkét esemény bekövetkezik

Pl. 1. Kockadobás

$\{2,4,6\} = A$: páros számot dobunk

$\{2,3,5\} = B$: prímszámot dobunk

$$A+B = \{2,3,4,5,6\}$$

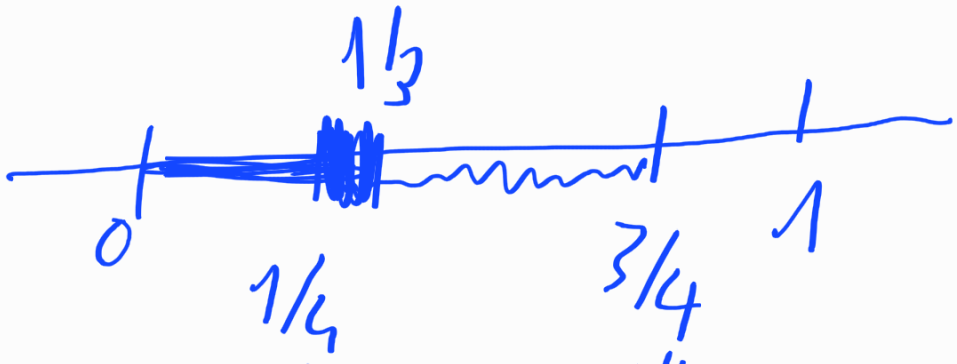
$$A \cdot B = \{2\}$$

2. RND: a [0,1] intervallumból véletlenszerű egyenletes eloszlással

Egy számot

$A = [0, \frac{1}{3}]$ - ból választunk számot

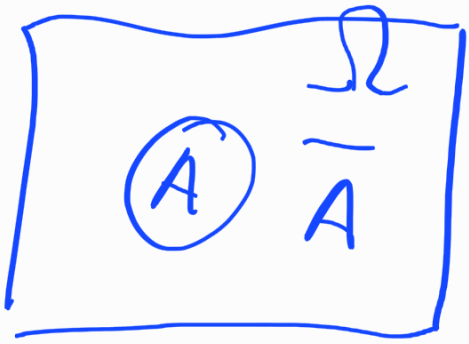
$B: [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ - ~~ba~~ - ~~ik~~



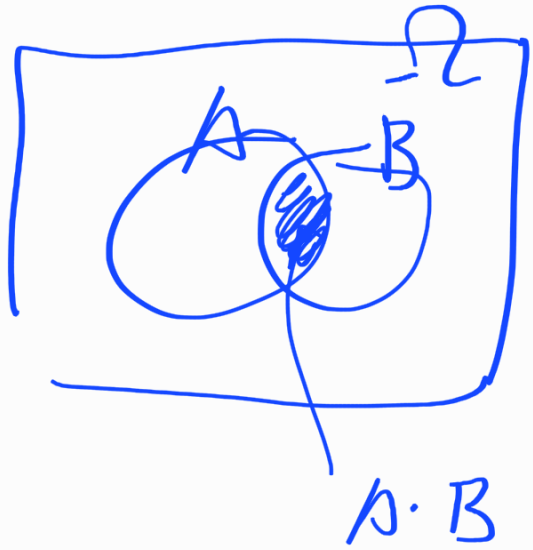
$A \cup B = [0, \frac{3}{4}]$ - ból van a véletlen szám

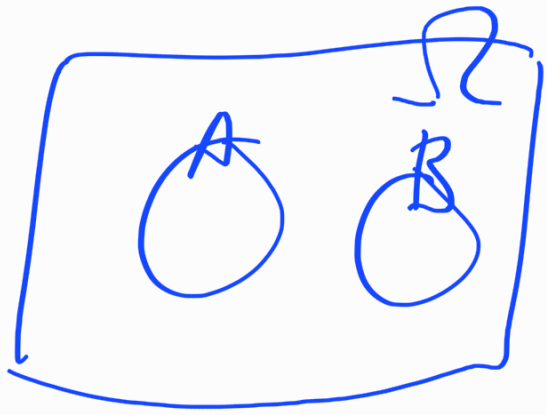
$A \cdot B = [\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$ - ból választunk

- Az A és B fizikai kapcsolatban, ha A és B egymást nem zárt-ra hat be.



A és B kizáró:





Esemény valószínűsége

Az A eseménnyel kapcsolatban n db kísérletet, megfigyelést végzünk. Az n megfigyelés során k-szor következett be az A esemény.

$0 \le k \le n$

k: az A esemény gyakorisága

$\frac{k}{n}$: az A esemény relatív gyakorisága

$$0 \le \frac{k}{n} \le 1$$

Ha n értékét növeljük, akkor a $\frac{k}{n}$ tört egy szám körül stabilizálódik, amit az A esemény valószínűségének hívunk: $P(A)$

$$\frac{k}{n} \approx P(A)$$

Megj.: 1. $0 \le P(A) \le 1$.

2. Biztos esemény: $k = n$

$$\frac{k}{n} = 1 \qquad P(A) = 1$$

3. Lehetetlen esemény: A

$$k = 0: \quad \frac{k}{n} = \frac{0}{n} = 0 \Rightarrow P(A) = 0$$

4. Az A komplementere: $\bar{A}$

Ha n megfigyelésből az A esemény k szor következik be, akkor $\bar{A}$

$n-k$-nak következik be.

A relatív gyakorisága $= \frac{k}{n} \approx P(A)$

$\bar{A}$ – " $= \frac{n-k}{n} = 1 - \frac{k}{n}$

$\approx P(\bar{A})$

$$P(\bar{A}) \approx 1 - \frac{k}{n} \approx 1 - P(A)$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$P(\Omega) = 1$

az A esemény valószínűsége az esemény területeként jelenítheto meg

4. Az A és B eseményen összege: $A+B$

n db kísérlet

az A esemény k_A - szor következik be

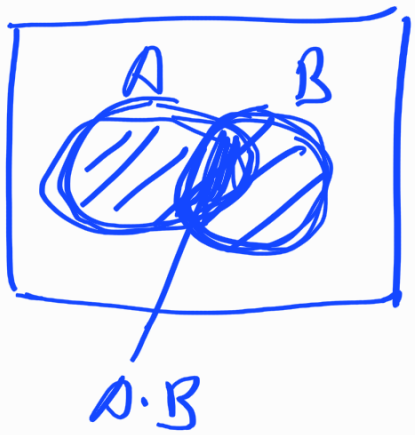
B k_B

$A+B$ k_{A+B}

$$P(A+B) \approx \frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A + k_B - k_{A\cdot B}}{n} =$$

$$\underbrace{\frac{k_A}{n}}_{\approx P(A)} + \underbrace{\frac{k_B}{n}}_{\approx P(B)} - \underbrace{\frac{k_{AB}}{n}}_{\approx P(A\cdot B)}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B)$$



5. Ha A és B kizáró események:

$A \cdot B$ lehetetlen esemény:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = P(A) + P(B)$$

Ha csak véges sok elemi esemény van és minden elemi eseménynek ugyanannyi a valószínűsége, akkor a valószínűséget a $\frac{\text{kedvező}}{\text{összes}}$ képlettel számolhatjuk:

Pl. kockadobás

A: prímszámot dobok $\{2,3,5\}$

$$P(A) = \frac{3}{6}$$

1. Szabályos kockával dobok

A: 6-ost dobok

B: páratlan számot dobok

$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$P(B) = \frac{3}{6}$, $P(A+B) = \frac{4}{6}$

2. Egy szabályos pénzérmével kétszer dobok

A: dobok fejet

B: dobok írást

$P(A) = \frac{3}{4}$

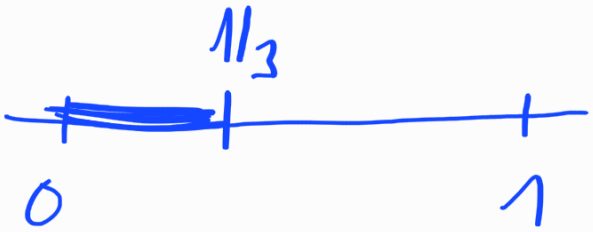
$P(B) = \frac{3}{4}$

$P(\bar{A}) = \frac{1}{4}$

$P(A+B) = 1$

$P(A \cdot B) = \frac{2}{4}$

3. RND $\quad P(RND < \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$



Feltétele valószínűség

Feladat: Határozzuk meg az A esemény valószínűségét, ha tudom, hogy a B esemény már bekövetkezett.

n db kísérlet, ebből k_B-szer következik be a B esemény, ezek közül $k_{A,B}$-szer következik be az A esemény

Így most a A módosított relatív gyakoriság:

$$\frac{k_{AB}}{k_B} = \frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_B}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

<u>Def</u> Ha A és B olyan események, hogy $P(B) > 0$, akkor A esemény B feltétel mellletti valószínűsége:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Pl. 1. Kocka dobás

B: páros számot dobunk

A: 6-ost dobunk

$$P(A|B) = \frac{P(A\,B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(\text{páros számot dobunk és 6-ost dobunk})}{P(\text{páros számot dobunk})}$$

$$= \frac{P(\text{6-ost dobunk})}{P(\text{páros})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

2. Kétszer dobunk egy pénzérmével

A: dobunk fejet

B: írást

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} =$$

$$\frac{P(\text{írást és fejet is dobunk})}{P(\text{dobunk írást})} =$$

$$= \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

3. Egy üzemben két gépsor van. Egy napra termelés:

	1. gépsor	2. gépsor	
I. műtő	420	210	630
II. műtő	265	455	
	685		

Egy nap végén a termékek közül egyet kiválasztunk.

$$P(\text{I. műtő} \mid \text{1. gépsor}) = \frac{420}{685}$$

$$P(\text{1. gépsor} \mid \text{I. műtő}) = \frac{420}{630}$$

Független események

Az A és B események függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Pl. 1. Kétszer dobok egy pénzérmével

A: első dobok fej

B: 2. írás

FF

$\boxed{FI}$.

IF

II.

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$$

$\Rightarrow$ A és B független

2. Kockával dobok

A: páros számot dobok

B: 3-nál nagyobbat dobok

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$A \cdot B = \{4, 6\}$$

$$P(AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ A és B nem független

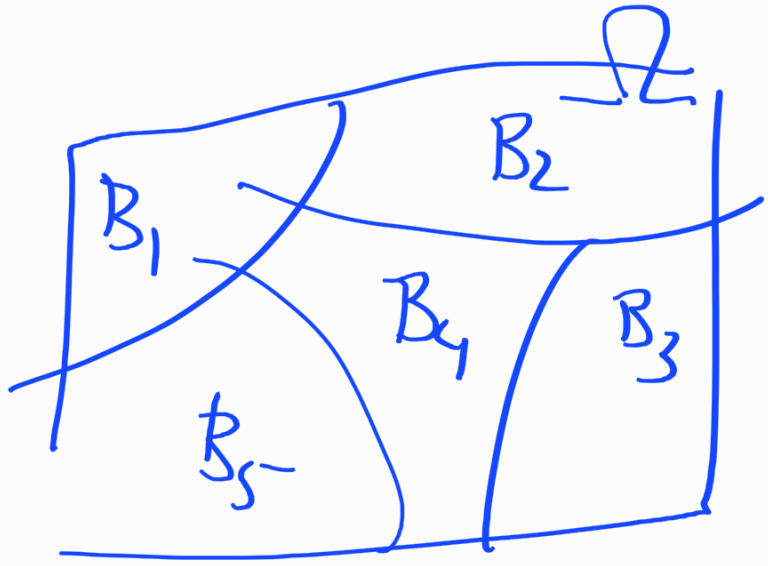
<u>Teljes valószínűség tétel és</u>

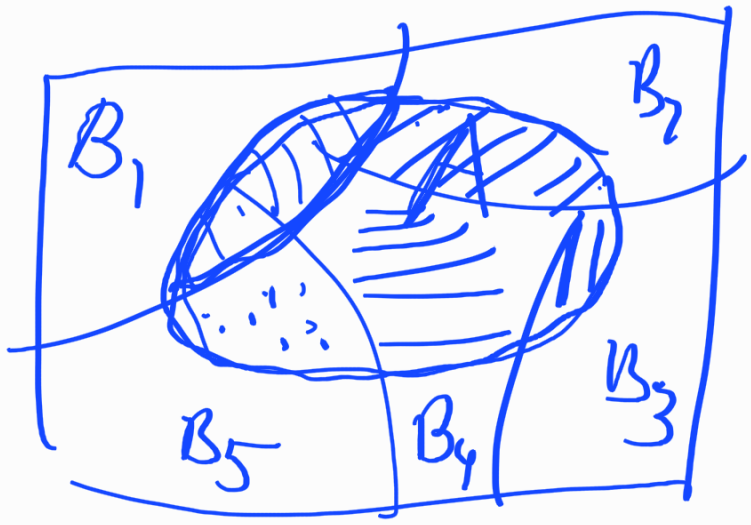
<u>Bayes tétel</u>

A $B_1, B_2, \ldots, B_n$ lehetőségek

teljes eseményrendszert alkotnak,

ha $B_i \cdot B_j = \emptyset$ és $B_1 + B_2 + \dots + B_n = \Omega$





$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n)$$

$$P(A|B_i) = \frac{P(AB_i)}{P(B_i)}$$

$$P(AB_i) = P(A|B_i)\,P(B_i)$$

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + \dots + P(A|B_n)\,P(B_n)$$

Teljes valószínűség tétel

Bayes-tétel:

$$P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\,P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \dots + P(A|B_n)\,P(B_n)}$$

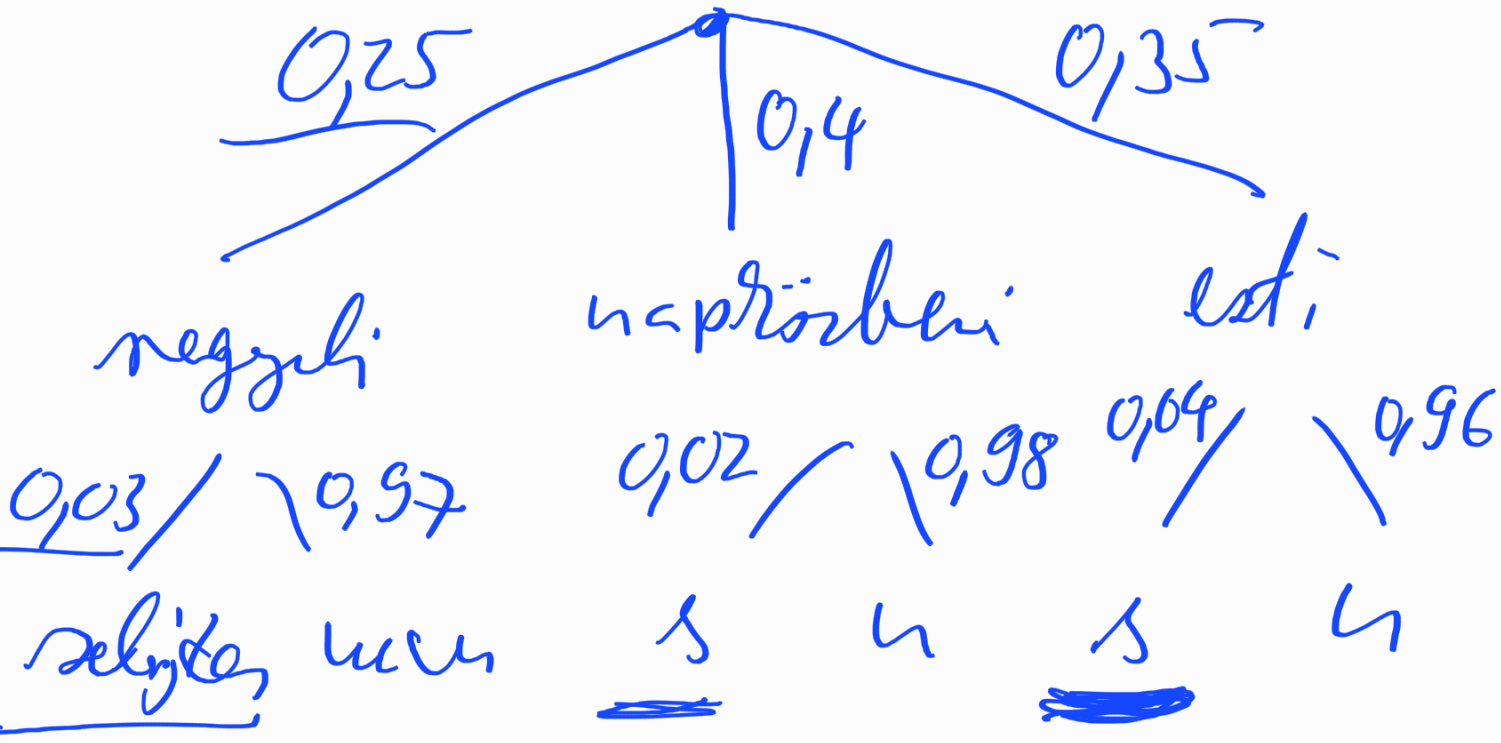
Pl. 1. Egy gyárban reggeli, napközbeni és esti műszak van. A reggeli műszak 3%-ban a napközbeni 2%-ban az esti 4%-ban gyárt selejtes termékeket. A reggeli műszak az egész napi termék 25%-át, a napközbeni 40%-át készíti

Mi a vége, hogy egy nap

a, egy terméket megvizsgálva selejtest találunk

b, ha egy terméket meg-

vizsgálva az selejtes, ahhoz azt az esti műszak résztvett!



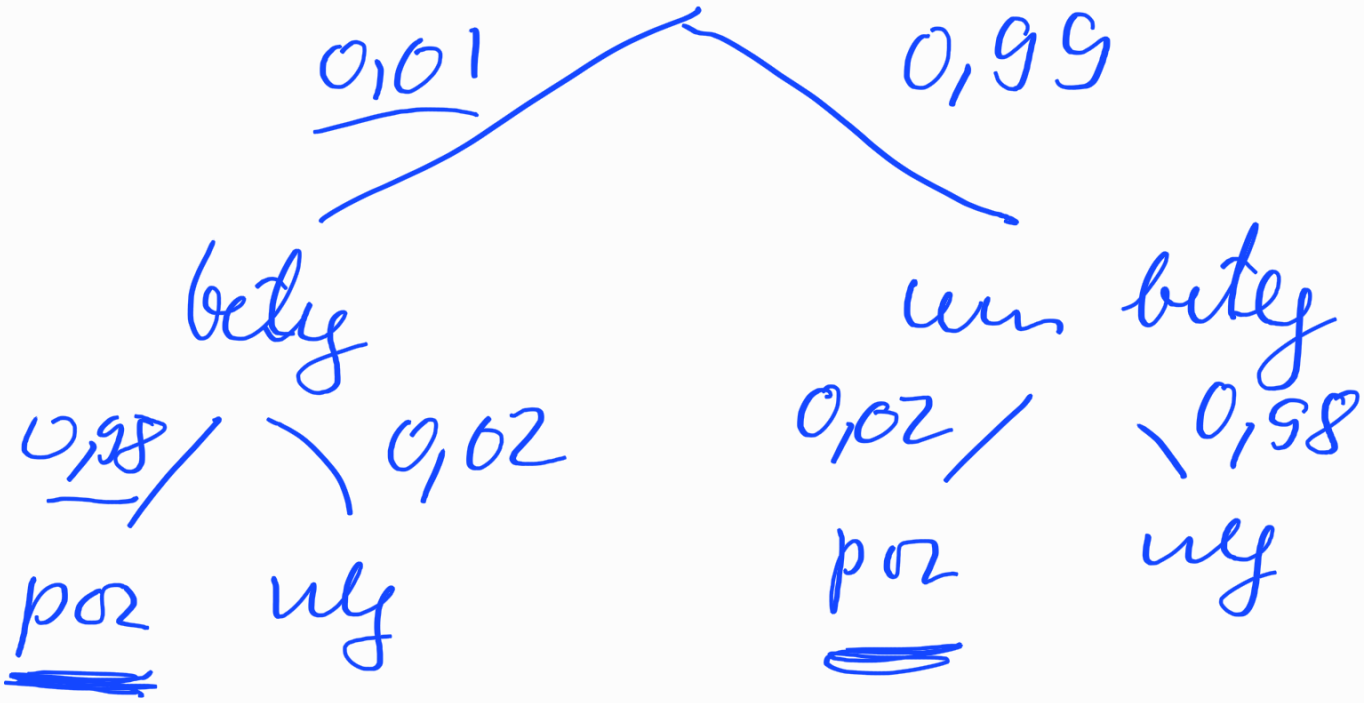
a, $P(\text{selejt}) = 0{,}25 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}4$

b, $P(\text{esti} \mid \text{selejt}) = \dfrac{P(\text{esti műszak selejtje})}{P(\text{selejt})} =$

$$\frac{0{,}35 \cdot 0{,}4}{0{,}25 \cdot 0{,}03 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}4}$$

2. Van egy tesztünk egy bizonyos betegségre.
Egy beteg embernél 98% az esélye betegséget mutat ki egy nem beteg embernél 2% az esélye betegséget.
Ha valakinél betegséget mutatott a teszt, akkor mi a valószínűsége, hogy tényleg beteg?
Tegyük fel hogy a lakosság

1.1. – a betegs.



$$P(\text{betegs} \mid \text{pozitív}) =$$

$$\frac{P(\text{betegs és pozitív})}{P(\text{pozitív})} =$$

$$\frac{0{,}01 \cdot 0{,}98}{0{,}01 \cdot 0{,}98 + 0{,}02 \cdot 0{,}99} =$$

$$\frac{98}{98+198} = \frac{98}{296} = 0{,}33$$

10.000 ember

- 100 beteg
  - 98 poz
  - 2 neg
- 9900 nem beteg
  - 198 poz
  - 9702 neg