Poisson: X λ paraméterű Poisson-eloszlású v.v., ha

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \lambda$$

Pl. Egy augusztusi éjszakán egy óra alatt átlag két hullócsillagot látunk.

a) Mi a vagy, hogy egy augusztusi éjszakán 2 óra alatt 5 hullócsillagot látunk?

Y: 2 óra alatt hány hullócsillagot látunk

Y Poisson $\lambda = 4$

$$P(Y = \underbrace{5}_{k}) = e^{-4} \cdot \frac{4^5}{5!}$$

Folytonos v.v.-k

Az X egy folytonos valószínűségi változó, ha a lehetséges kimenetelek halmaza egy intervallum vagy egy félegyenes vagy az összes valós szám.

Az X jellemzésénél az eloszlásfüggvényt használhatjuk:

$$F(x) = P(X < x)$$

Megj: Ha X egy folytonos v.v., akkor bármely $x \in \mathbb{R}$: $P(X = x) = 0$

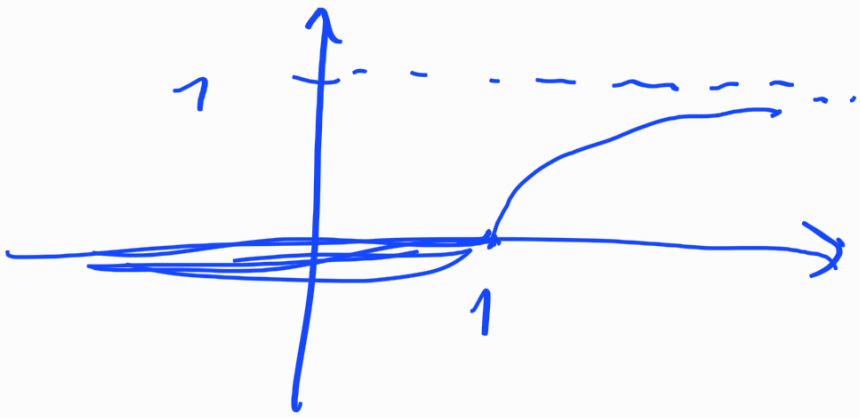
Eloszlásfv tulajdonságai:

1., $F(x)$ monotonű

2., $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$

Pl. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^4} & \text{ha } x \geq 1 \end{cases}$



Ha $a<b$: $P(a<X<b) =$

$P(X<b) - P(X \leq a) =$

$P(X<b) - P(X<a) = F(b) - F(a)$

Az X v.v. sűrűségfv:

$f(x) = F'(x)$

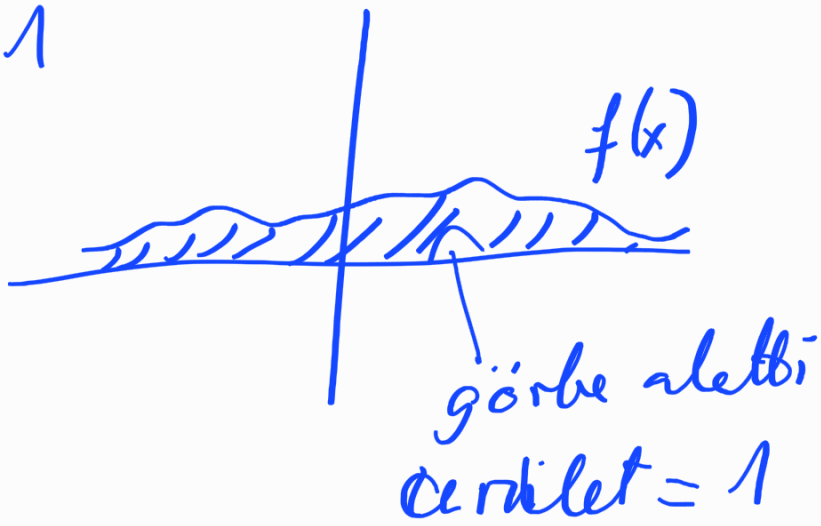
Pl. $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^4} & x > 1 \end{cases}$ $\quad (1 - x^{-4})' = -(-4)x^{-5}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{4}{x^5} & x > 1 \end{cases}$

Sűrűségfv tulajdonságai:

1.) $f(x) \geq 0 \qquad x \in \mathbb{R}$

2.) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$



$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt$$

<u>Def</u> Az X folytonos eloszlású v.v. p-edrendű kvantilisének az x szám, amire $F(x) = P(X < x) = p$

Tipikusan: $p = 0{,}01$
$0{,}05$
$0{,}95$
$0{,}99$

Pl. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x^4} & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

$p = 0{,}95$

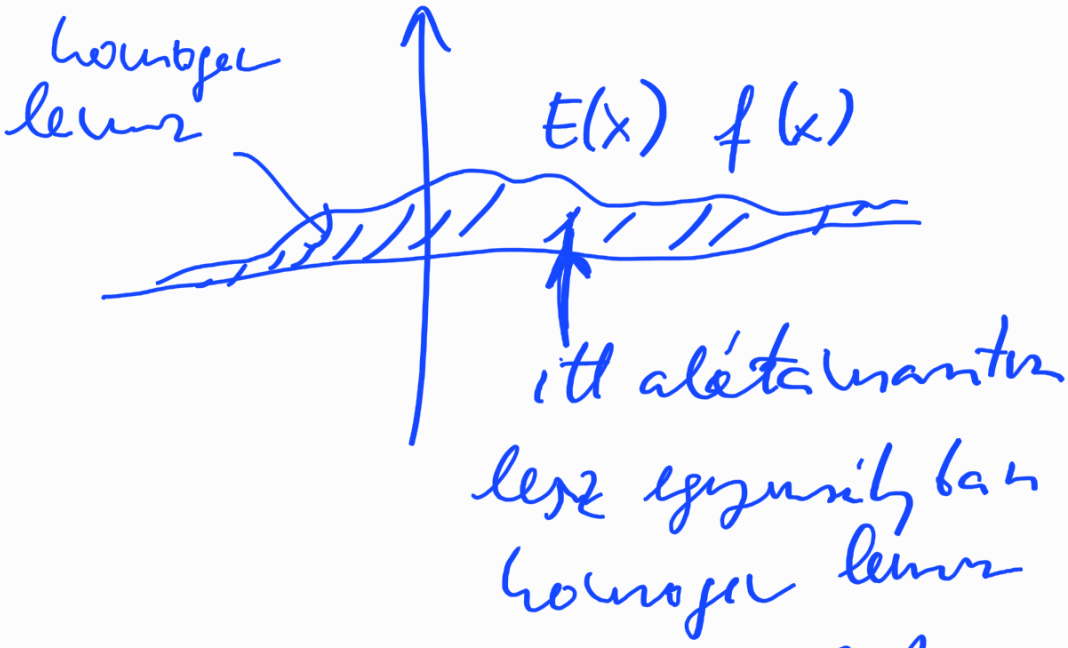
$F(x) = 0{,}95 \qquad x = ?$

$1 - \frac{1}{x^4} = 0{,}95$

$\frac{1}{x^4} = 0{,}05 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{0{,}05} = 20$

$x = \sqrt[4]{20}$

Az X folytonos v.v. várható értéke: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$



Pl. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \le 1 \\ 4 \cdot x^{-5} & \text{ha } x > 1 \end{cases}$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_{1}^{\infty} 4 \cdot x^{-5} \cdot x\, dx$

$$= \int_1^{\infty} 4 \cdot x^{-4} dx = \left[4 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^{\infty} =$$

$$\left[-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x^3} \right]_1^{\infty} = 0 - \left(-\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1^3} \right) = \frac{4}{3}$$

Szórás: $D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2$

mérésnégyzet

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Pl. $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 4x^{-5} & x > 1 \end{cases}$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{\infty} x^2 \cdot 4x^{-5} dx =$$

$$\int_1^{\infty} x^{-3} \cdot 4 \, dx = \left[4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^{\infty} = \left[\frac{-2}{x^2} \right]_1^{\infty} =$$

$$0 - \left(\frac{-2}{1^2} \right) = 2$$

$$D^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3} \right)^2 = \frac{2}{9}$$

$$D(X) = \sqrt{\frac{2}{9}}$$

Nevezetes folytonos eloszlások

1. Egyenletes eloszlású v.v.

Az X egyenletes eloszlású v.v. az $[a,b]$-ben, ha minden

$a \le c < d \le b$

$$P(X \in [c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$$

Eloszlásfv:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

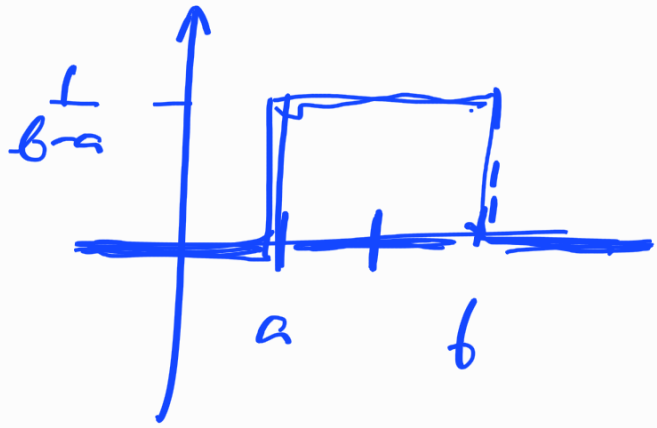
ha $a < x < b$

$$P(X < x) = P(X \in [a,x]) = \frac{x-a}{b-a}$$

Sűrűségfv:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } a \le x \le b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$



$$D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

RND : [0,1] intervallumra egyenletes

$$P(RND \in [0{,}2 ; 0{,}6]) = \frac{0{,}4}{1} = 0{,}4$$

4RND: [0,4] intervallumból egyenletes eloszlással ad számot

[3,8] intervallumból szintén egyenletes eloszlással számot: 3+5·RND

Exponenciális eloszlású v. v-k

Általában élettartamokkal kapcsolatos feladatoknál jön elő az exponenciális eloszlású v.v.

A λ paraméterű exp. eloszlású v.v. eloszlásfv:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

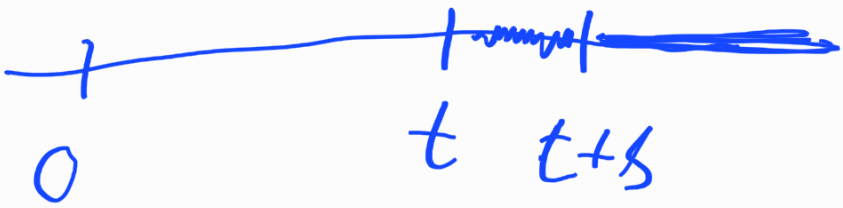
Sűrűségfv.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases}$$

Megmutatható, hogy $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Az exp. elo-ú v.v. rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal: ha $s, t > 0$

$$P(X > s+t \mid X > t) = P(X > s)$$



Exp. elo-jú v.v:

1.) Radioaktív anyag bomlási ideje

2.) Egy nem öregedő műszaki rendszer élettartam

Pl. 1. Egy radioaktív anyag felezési ideje 20 év.

1. 50 év alatt az anyag hány százaléka bomlik el?

2. Mennyi idő alatt bomlik el az anyag 75%-a?

X: egy véletlenül kiválasztott radioaktív anyag mennyi idő alatt bomlik el exp. elo

$$0{,}5 = P(X<20) = F(20) = 1-e^{-\lambda\cdot 20}$$

$$e^{-\lambda\cdot 20} = 0{,}5 \Rightarrow \lambda = 0{,}0346$$

1. $P(X<50) = F(50) = 1-e^{-\lambda\cdot 50} =$

$$1-e^{-0{,}0345\cdot 50} = 0{,}822$$

2. $x = ?$ $\qquad F(x) = 0{,}75$

$$\underbrace{0{,}75}_{} = F(x) = 1-e^{-\lambda\cdot x} = 1-e^{-0{,}0346\cdot x}$$

$$\Rightarrow e^{-0{,}0346x} = 0{,}25 \Rightarrow x = 40$$

Normális eloszlású v.v.

A X standard normális eloszlású v.v. ha sűrűségfve:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

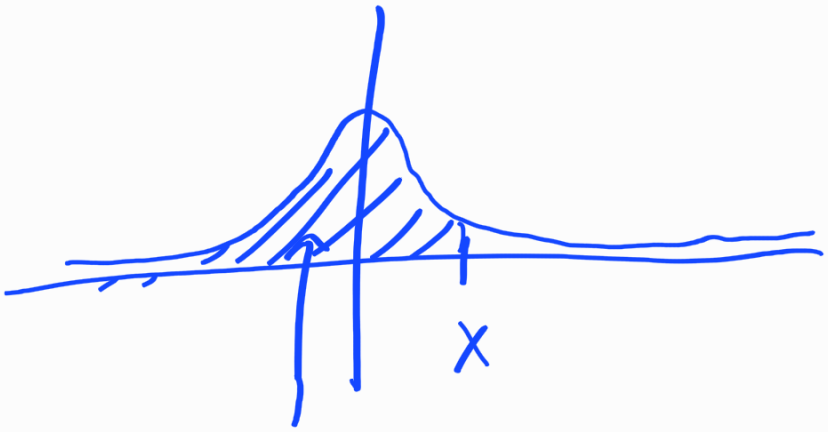
Gauss-görbe
haranggörbe

$E(X) = 0, \quad D(X) = 1$

Az eloszlásfv.: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt =$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$, ami csak

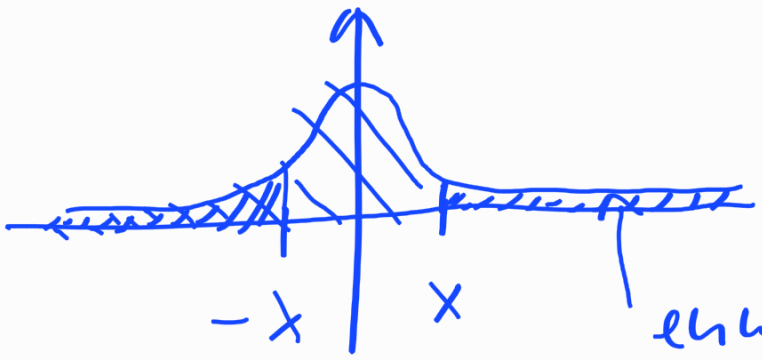
táblázat segítségével számolható



$\Phi(x)$ ennek a görbe a területe

A táblázat csak $x > 0$ esetén tartal-

mazza a $\Phi(x)$ értékeket.



ennek a területe

a $\Phi(-x)$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Pl. X egy standard normális eloszlású v.v.

c) $P(X<1) = \Phi(1) = 0{,}8413$

b) $P(-2<X<3) = \Phi(3) - \Phi(-2) =$

$\Phi(3) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(2) + \Phi(3) - 1$

$= 0{,}9772 + 0{,}9987 - 1 = \ldots$

Általános normális eloszlás:

Legyen egy standard normális eloszlású v.v., $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

Ekkor $\underbrace{Y = \sigma X + \mu}$ egy μ és σ paraméterű normális eloszlású v.v.

$$E(Y) = E(\sigma X + \mu) = \sigma \underbrace{E(X)}_{0} + \mu$$

$$= \mu$$

$$D(Y) = D(\sigma X + \mu) = \sigma \underbrace{D(X)}_{1} = \sigma$$

Egy (μ, σ) paraméterű normális eloszlású v.v. szórásnégyzetek

μ: várható érték

σ: szórás

$$\frac{Y-\mu}{\sigma} = X$$

Ha Y egy (μ, σ) normális eloszlású v.v., akkor $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ standard normális eloszlású v.v. lesz.

$$Y \sim N(\mu, \sigma)$$

$$P(Y < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < Y < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

Pl. 1. Legyen X normális eloszlású v.v. $\mu = 20$, $\sigma = 10$ értékekkel

a) $P(X < 25)$

b., $P(21 < X < 32)$

c., $P(X > 17)$

a., $P(X<25) = \phi\left(\frac{25-20}{10}\right) =$

$\phi(0,5) = 0,6915$

b., $P(21 < X < 32) = \phi\left(\frac{32-20}{10}\right) -$

$\phi\left(\frac{21-20}{10}\right) = \phi(1,2) - \phi(0,1) =$

$0,8849 - 0,5398 = ..$

c., $P(X>17) = 1 - P(X<17)$

$1 - \phi\left(\frac{17-20}{10}\right) = 1 - \underbrace{\phi(-0,3)}_{1-\phi(0,3)}$

$1 - (1 - \phi(0,3)) = \phi(0,3) = 0,6179$

2. a, $P(|X-\mu| < 2\sigma)$

b., $P(|X-\mu| < 3\sigma)$

a) $P(-2\sigma < X - \mu < 2\sigma) =$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) =$

$\phi\left(\frac{\cancel{\mu} + 2\sigma - \cancel{\mu}}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma}\right) =$

$\phi(2) - \underbrace{\phi(-2)}_{(1-\phi(2))} = 2\phi(2) - 1 =$

$2 \cdot 0{,}9772 - 1 = 0{,}9544$

b) $P(|X - \mu| < 3\sigma) =$

$P(-3\sigma < X - \mu < 3\sigma) =$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) =$

$\phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) =$

$\phi(3) - \phi(-3) = \phi(3) - (1 - \phi(3)) =$

$2\phi(3) - 1 = 2 \cdot 0{,}9987 - 1 = 0{,}9974$

A normális eloszlás tipikusan akkor jön elő, ha a valószínűségi változó sok v.v. összegeként írható fel.

Pl. 1. Egy lakótelepi ház egy téli napon mennyi gázt fogyaszt

2. Egy óriáskerekénél a napi bevétel