Gyakorló feladatsor Betontechnológus szakmérnöki Matematikai statisztika tárgyhoz

1. (1/5) Legyen A és B két esemény. Definiálja az A és B
   (a) összegét $(A + B)$
   (b) szorzatát (AB)
   (c) Legyen az X valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású. Legyen A az az esemény, hogy X a $[0, \frac{1}{3}]$ és a B esemény, hogy X a $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ intervallumba esik. Mi az $A + B$ és AB jelentése?
2. (1/5,7,8)
   (a) Definiálja az A esemény valószínűségét!
   (b) Mi a valószínűsége, hogy egy szabályos kockával dobva a dobás értéke legalább 4?
   (c) Definiálja az A esemény komplementerét $(\overline{A})$!
   (d) Mi a kapcsolat az A és $\overline{A}$ események valószínűségei között?
3. (a) (1/11) Definiálja a feltételes valószínűség fogalmát
   (b) Ha egy szabályos kockával páros számot dobok, akkor mi a valószínűsége, hogy hatost dobok?
   (c) (1/14) Mikor mondjuk, hogy az A és B események függetlenek?
   (d) (1/14) Kétszer dobok egy szabályos pénzérmével. Legyen A: első dobás fej, B: második dobás írás. Mutassa meg, hogy az A és B események függetlenek.
4. (a) (1/16) Mikor mondjuk, hogy a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ események teljes eseményrendszert alkotnak?
   (b) Kockadobásnál az alábbi 3 eseményből válasszon ki egy teljes eseményrendszert:
      i. A: páros számot dobok
      ii. B: legalább négyet dobok
      iii. C: páratlan számot dobok
   (c) (1/16, 17) Nevezzen meg két tételt, melyben feltételes valószínűségek használunk (nem kell leírni a részletes tételt!)
5. (a) (2/1) Mikor mondjuk, hogy az X valószínűségi változó diszkrét eloszlású?
   (b) (2/1) Kétgyerekes családnál jelölje X a fiúk számát. Adja meg X eloszlását!
   (c) (2/3) Az X valószínűségi változó esetén definiálja a módusz fogalmát!
   (d) Mi lesz a b.-ben definiált valószínűségi változó módusza?
6. (a) (2/5) Definiálja az X diszkrét valószínűségi változó várható értékének fogalmát!
   (b) (2/5) Mi a várható érték fizikai jelentése?
   (c) Jelölje X egy kétgyerekes családban a fiúk számát! Határozza meg X várható értékét!

7. (a) (2/7) Definiálja az X diszkrét valószínűségi változó szórásának fogalmát!
   (b) (2/9) Jelölje X egy kétgyerekes családban a fiúk számát! Határozza meg X szórását!

8. (a) Milyen nevezetes diszkrét eloszláshoz tartoznak?
      i. (2/11) X: kockadobás eredménye
      ii. (2/13) 10-szer dobok pénzérmével X: a fejek száma
      iii. (2/13) Egy kockával addig dobok, amíg hatost nem dobok. X: dobások száma
   (b) (2/21) Irjon le három olyan véletlen jelenséget, amely Poisson-eloszlást követ

9. (a) (3/1) Definiálja az X folytonos eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
   (b) (3/1) Milyen tulajdonságai vannak az eloszlásfüggvénynek?
   (c) (3/9) Adja meg az RND (a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó) eloszlásfüggvényét!

10. (a) (3/3) Definiálja az X folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!
    (b) (3/3) Milyen tulajdonságai vannak az sűrűségfüggvénynek?
    (c) (3/9) Adja meg az RND (a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó) sűrűségfüggvényét!

11. (a) (3/10) Definiálja a λ-paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvényét
    (b) (3/10) Mi az exponenciális eloszlás λ paramétere és a várható értéke közötti kapcsolat?
    (c) (3/11) Mit jelent, hogy az exponenciális eloszlású valószínűségi változó örökifjú tulajdonságú?
    (d) (3/11) Írjon le két példát exponenciális eloszlású valószínűségi változóra

12. (a) (3/13) Definiálja a standard normális eloszlású valószínűségi változó sűsrűségfüggvényét és ábrázolja azt!
    (b) (3/13) Mi a standard normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke, szórása?
    (c) Legyen X egy standard normális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg a $P(-1 < X < 2)$ valószínűséget!

13. (a) (3/17) Legyen X egy (m, σ) paraméterű normális eloszlású valószínűségi változó. Határozza meg a
    $$P(m - 2\sigma < X < m + 2\sigma)$$
    valószínűséget!
    (b) (3/19) Miért olyan fontos a normális eloszlás?
    (c) (3/19) Irjon le két példát arra, ahol normális eloszlással kell számolni!

14. (a) (4/15) Mi a maximum-likelihood becslés X diszkrét valószínűségi változó esetén?
    (b) (4/18) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy λ-paraméterű Poisson eloszlásból származó minta. Mit ad eredményül a maximum-likelihood becslés?

15. (a) (4/16) Mi a maximum-likelihood becslés X folytonos valószínűségi változó esetén?
    (b) (4/20,21) Legyen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ egy (m, σ)-paraméterű normális eloszlásból származó minta. Mit ad eredményül a maximum-likelihood becslés?

16. (5/9) Az 50 kg-os cementeszsákok készítésénél a töltőtömeget lehet beállítani, a szórás adott. Tegyük fel, hogy cementeszsákok súlya normális eloszlást követ és a szórás: 0,2. Tegyük fel, hogy 16 zsákot veszünk, melyek súlyai:

$$49,9 \quad 50,2 \quad 50,1 \quad 49,7 \quad 49,8 \quad 49,9 \quad 50 \quad 49,8$$

$$49,8 \quad 50,3 \quad 50 \quad 49,9 \quad 49,8 \quad 49,9 \quad 50,1 \quad 49,8$$

Adja meg az $\epsilon = 0,05$ értékhez tartozó konfidencia intervallumot, azaz adja meg azt az intervallumot, ahová a tényleges átlagérték 95% biztonsággal esik!

17. (5/16) Az 50 kg-os cementeszsákok tömege véletlen mennyiség, amiről tudjuk, hogy normális eloszlást követ, de az (m, σ) paramétereket nem ismerjük. Megmérjük 5 db cementeszsák tömegét és ezekre a következő értékeket kapjuk kg-ban:

$$49,7 \quad 50,1 \quad 49,8 \quad 50 \quad 49,9$$

Adja meg 95% valószínűséggel, hogy az m várható érték melyik intervallumba esik!

18. (6/10) Egy 50 kg-os cementeszsákokat gyártó céget meggyanusítanak, hogy ténylegesen kevesebb mint 50 kg az átlagos tömeg. Ehhez egy 25 elemű mintát vesznek a következő adatokkal:

$$49,7 \quad 49,9 \quad 50 \quad 49,8 \quad 50,1 \quad 49,6 \quad 50,1 \quad 49,8 \quad 50$$

$$49,9 \quad 49,8 \quad 50,2 \quad 49,9 \quad 50 \quad 49,7 \quad 49,9 \quad 49,7$$

$$49,8 \quad 49,9 \quad 49,6 \quad 49,9 \quad 50,2 \quad 49,9 \quad 49,9 \quad 50,2$$

Tudjuk, hogy a cég által használt gyártósor szórása $\sigma_0 = 0,3$. Biróság dönt a kérdésben, amely $\epsilon = 0,05$ elsőfajú hiba mellett hozza meg a döntést.

19. (6/15) Az előző feladatban lévő gépsoron tisztítást végeznek, ami során újra beállítják a gépet. A tisztítás előtt 10 elemű mintát vesznek a következ adatokkal:

$$49,8 \quad 50,1 \quad 49,9 \quad 49,8 \quad 50 \quad 49,8 \quad 49,9 \quad 50,1 \quad 49,8 \quad 50,2$$

A tisztítás után újra beállítják, ekkor a következ 8 elemű mintát kapják:

$$49,7 \quad 49,8 \quad 49,6 \quad 50,1 \quad 49,7 \quad 49,8 \quad 49,7 \quad 50,1$$

Elfogadjuk-e, hogy ugyanúgy sikerült a beállítás, azaz a két várható érték megegyezik $\epsilon = 0,05$ elsőfajú hibával?

20. (7/6) Vizsgáljuk meg, hogy szabályosnak tekinthető-e az a dobókocka, melyet $n = 1200$-szor feldobva az egyes oldalak gyakoriságai

$$v_1 = 184, \quad v_2 = 212, \quad v_3 = 190, \quad v_4 = 208, \quad v_5 = 212, \quad v_6 = 194.$$

. A döntésünket $\epsilon = 0,05$ elsőfajú hiba mellett hozzuk meg.

21. (7/9) Tekintsük az alábbi megfigyeléssort (az adatokat az egyszerűség kedvéért nagyság szerint rendezve adjuk meg):

$$0,03, \quad 0,05, \quad 0,08, \quad 0,08, \quad 0,11, \quad 0,12, \quad 0,14$$

$$0,19, \quad 0,23, \quad 0,24, \quad 0,31, \quad 0,43, \quad 0,45, \quad 0,56$$

$$0,61, \quad 0,67, \quad 0,69, \quad 0,78, \quad 0,85, \quad 0,88$$

$\epsilon = 0,05$ elsőfajú hiba mellett döntsön arról a hipotézisról, hogy a minta a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból származik-e (RND-e)!

22. (7/21) Két dobokockával dobva az alábbi gyakoriságokat figyeltük meg:

	1	2	3	4	5	6
1. kocka	27	24	26	23	18	32
2. kocka	18	12	15	21	14	20

$\epsilon = 0,05$ elsőfajú hiba mellett döntsön arról, hogy a két kocka tekintheő-e azonos eloszlásúnak!

23. (7/25) Az alábbi táblázat mutatja, hogy egy évfolyamon hányan kapták az egyes jegyeket statisztikából aszerint csoportosítva a diákokat, hogy sportolnak-e rendszeresen. $\epsilon = 0,05$ elsőfajú hiba mellett döntsünk arról, hogy független-e a statisztika jegy a sportolástól

jegyek	2	3	4	5
nem sportolnak	50	35	35	20
sportolnak	10	15	25	10

24. (8/10) Tegyük fel, hogy az (X, Y)-ra a következő 10 elemű mintánk van:

$$(3,10), \quad (2,7), \quad (6,16), \quad (4,10), \quad (3,12)$$

$$(1,4), \quad (6,17), \quad (5,13), \quad (4,14), \quad (2,9)$$

Határozza meg a regressziós egyenest!