Házi feladatok

1. Határozza meg a mod 8 karaktereket! (2p)

2. Legyen χ nem főkarakter mod 3. Adja meg az $L(1,\chi)$ pontos értékét (nem numerikus sorral) (6p)

3. Legyen $\mathbb{F}_p$ a p elemű test (p prímszám) és jelölje $\left(\frac{x}{p}\right)$ a Legendre-szimbólumot. Mutassa meg, hogy

   (a)
   $$|\{(x,y:x), y \in \mathbb{F}_p, x^2+y^2=1)\}| = p+\sum_a \left(\frac{a}{p}\right)+\sum_b \left(\frac{b}{p}\right)+\sum_{a+b=1} \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \quad (2p)$$

   (b)
   $$|\{(x,y) : x, y \in \mathbb{F}_p, x^2+y^2=1\}| = p-(-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad (5p)$$

4. Mutassa meg, hogy $\pm 5^i$, $i = 0, 1, \ldots, 2^{n-2}-1$ maradékosztályok modulo 2^n, $n \geq 2$ redukált maradékrendszert alkotnak modulo 2^n. (4p)

5. Bizonyítsa be, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne tartalmazzon $c \log n$ hosszú egyszínű számtani sorozatot elég nagy c esetén. (Útmutatás: 1/2-1/2 valószínűséggel színezzük pirosra ill. kékre a számokat.) (6p)

6. Bizonyítsa be, hogy az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számok közül kiválasztható $\frac{n}{2}$ darab, hogy az nem tartalmaz $10\frac{\log n}{\log\log n}$ hosszú számtani sorozatot! (8p)

7. Bizonyítsa be, hogy k darab színnel színezve a pozitív egészeket lesz az $x^2 = yz$ egyenletnek nemtriviális egyszínű megoldása. (4p)

8. Bizonyítsa be, hogy k darab színnel színezve a pozitív egészeket lesz az $xy = xz + yz$ egyenletnek nemtriviális egyszínű megoldása. (Útmútatás: Osszunk xyz-vel és vizsgáljuk az $\frac{n!}{k}$, $1 \leq k \leq n$ számokat)(6p)

9. A Szemerédi-tételt használva mutassa meg, hogy ha n elég nagy, akkor az $1, 2, \ldots, n$ számok közül bárhogy legalább $0,01n$ számot kiválasztva az $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2019} = 2019x_{2020}$ egyenletnek lesz olyan megoldása, ahol az x_i-k különbözők és a kiválasztott számok között vannak. (3p)