1. Házi feladatok

1. Jelölje $d(n)$ az n osztóinak számát, $\mu(n)$ a Mőbius-függvényt és $\omega(n)$ az n különböző prímosztóinak számát. Bizonyítsa, be, hogy $\sigma > 1$ ($s = \sigma + it$) esetén

   (a) $\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$ (2p)

   (b) $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s}$ (2p)

   (c) $\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s}$ (2p)

   (d) $\frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s}$ (2p)

   (e) $\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n)}{n^s}$ (2p)

2. Jelölje $\phi(n)$ az Euler-függvényt. Bizonyítsa be, hogy $\sigma > 2$ esetén $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^s}$ (4p)

3. Jelölje $\Lambda(n)$ a Von Mangoldt szimbolumot. Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $\Lambda(n) + \sum_{m|n} \mu(m) log m = 0$ (2p)

4. Bizonyítsa be, hogy $\lim_{s \to 1+0} (\zeta(s) - \frac{1}{s-1}) = \gamma$, ahol γ az Euler-állandó. (4p)

5. Bizonyítsa be, hogy $\sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n) - 1) = 1$. (2p)

6. Bizonyítsa be, hogy $\sigma > 0$ esetén $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$. (2p)

7. Bizonyítsa be, hogy ha p_n jelöli az n-edik prímszámot, akkor a prímszámtétel ekvivalens azzal, hogy
$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \log n} = 1 \quad (4p)$$

8. Bizonyítsa be, hogy a prímszámtétel ekvivalens azzal, hogy
$$\lim_{n \to \infty} \frac{log[1, 2, ..., n]}{n} = 1 \quad (4p)$$