

## Házi feladatok

1. Határozza meg a  $\chi \pmod{8}$  karaktereket! (2p)
2. Legyen  $\chi$  nem főkarakter  $\pmod{3}$ . Adja meg az  $L(1, \chi)$  pontos értékét (nem numerikus sorral) (6p)
3. Legyen  $\mathbb{F}_p$  a  $p$  elemű test ( $p$  prímszám) és jelölje  $\left(\frac{x}{p}\right)$  a Legendre-szimbólumot. Mutassa meg, hogy

(a)

$$|\{(x, y : x), y \in \mathbb{F}_p, x^2 + y^2 = 1\}| = p + \sum_a \left(\frac{a}{p}\right) + \sum_b \left(\frac{b}{p}\right) + \sum_{a+b=1} \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right) \quad (2p)$$

(b)

$$|\{(x, y) : x, y \in \mathbb{F}_p, x^2 + y^2 = 1\}| = p - (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad (5p)$$

4. Bizonyítsa be, hogy az  $\{1, 2, \dots, n\}$  kiszínezhetők két színnel úgy, hogy ne tartalmazzon  $c \log n$  hosszú egyszínű számtani sorozatot elég nagy  $c$  esetén. (Útmutatás:  $1/2$ - $1/2$  valószínűséggel színezzük pirosra ill. kékre a számokat.) (6p)
5. Bizonyítsa be, hogy az  $\{1, 2, \dots, n\}$  számok közül kiválasztható  $\frac{n}{2}$  darab, hogy az nem tartalmaz  $10 \frac{\log n}{\log \log n}$  hosszú számtani sorozatot! (8p)
6. Bizonyítsa be, hogy  $k$  darab színnel színezve a pozitív egészeket lesz az  $x^2 = yz$  egyenletnek nemtriviális egyszínű megoldása. (4p)
7. Bizonyítsa be, hogy  $k$  darab színnel színezve a pozitív egészeket lesz az  $xy = xz + yz$  egyenletnek nemtriviális egyszínű megoldása. (6p)