**Feladatok a második hétre**

1. Határozzuk meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenletek általános megoldását!

   (a)
   $$y' - y = e^{-x},$$

   (b)
   $$y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2.$$

2. Tekintsük az
   $$y' - 2y = 3e^t$$
   differenciálegyenletet.

   (a) Határozzuk meg az iránymezőt!

   (b) Az iránymező vizsgálata után adjuk meg, hogyan viselkednek a megoldások nagy $t$ esetén!

   (c) Határozzuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását és vizsgáljuk meg, hogy ez hogyan viselkedik, ha $t \to \infty$!

3. Határozzuk meg a következő kezdetiérték-problémák megoldásait!

   (a)
   $$y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$$

   (b)
   $$ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = 1/2, \quad t > 0$$

   (c)
   $$ty' + (t+1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$$

4. Egy olajfinomítóban, egy tárolótartályban 8000 l benzin van, ami eredetileg 50 kg adalékot tartalmaz oldott állapotban. A téli időjárásra való előkészület miatt percenként 160 l olyan benzint pumpálnak a tartályba, amelyik 0,25 kg adalékot tartalmaz literenként. A jól kevert folyadékot percenként 180 l sebességgel engedik ki a tartályból. Mennyi adalékanyag lesz a tartályban 20 perccel az eljárás megkezdése után?

5. Egy 800 l-es tartály félig van desztillált vízzel. A t=0 időpontban olyan oldatot kezdünk el 20 l/perc sebességgel a tartályba önteni, ami 60 g oldott anyagot tartalmaz literenként. Ugyanakkor 12 l/perc sebességgel elkezdjük leengedni a folyadékot, miközben az egész tartályban levő mennyiséget állandóan jól keverjük. Mikorra lesz a tartály tele, és ekkor mennyi oldott anyagat fog tartalmazni?

6. A feladat (a), (b) és (c) pontjaiban $dy/dt = f(y)$ alakú differenciálegyenletet tekintünk. Mindegyik esetben először rajzolja le a $y \to f(y)$ függvény grafikonját, határozza meg a kritikus (egyensúlyi) pontokat, és osztályozza mindegyiket mint asszimptotikusan stabil Lyapunov stabil vagy instabil. Rajzolja le a fázisvonalakat és rajzolja le néhány megoldás görbéjét (közelítleg) a $t, y$ síkon.

   (a)
   $$dy/dt = y(y-1)(y-2), \quad y(0) = y_0 \geq 0$$

   (b)
   $$dy/dt = e^y - 1, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

   (c)
   $$dy/dt = -2(\operatorname{arctg} y)/(1+y^2), \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

   (d)
   $$y' = y^4 - 2y^3 - 15y^2$$

   A következő tételt tanultuk az előadáson:

   **1. TÉTEL.** *Tegyük fel, hogy mind az $f$, mind a $\partial f/\partial y$ folytonos függvények egy olyan $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ téglalapon, amely tartalmazza a $(t_0, y_0)$ pontot. Akkor van olyan $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ intervallum, amelyben a következő kezdetiérték-probléma megoldása létezik és egyértelmű:*
   $$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

7. A következő három problémában határozzuk meg a $ty$ síknak azon részeit, ahol a tétel feltételei teljesülnek:

   (a)
   $$y' = \frac{t-y}{2t+5y}$$

   (b)
   $$y' = \frac{\ln|ty|}{1-t^2-y^2}$$

   (c)
   $$y' = (t^2+y^2)^{3/2}$$

   Daniel Bernoulli 1760-ban már használt matematikai módszereket a himlő terjedésének vizsgálatára. A következő két feladatban egyszerű modelleket látunk erre a problémára. Hasonló modelleket használnak a rémhírek terjedésének modellezésére és bizonyos árucikkek terjedésének vizsgálatára.

8. Tegyük fel, hogy valamely populáció két részre osztható: azokra, akik megkaptak egy bizonyos betegséget és képesek megfertőzni másokat, és azokra, akik a betegséget még nem kapták, meg de hajlamosak arra, hogy a betegséget megkapják. Az utóbbiaknak a teljes populációhoz viszonyított arányát nevezzük $x$-nek, és az előbbinek a teljes populációhoz viszonyított arányát $y$-nak. Tehát $x + y = 1$. Tegyük fel, hogy a betegség azáltal terjed, hogy egészséges és beteg egyének találkoznak és a betegség terjedésének $dy/dt$ sebessége arányos ezen találkozások számával. Tegyük fel, hogy az egészséges és beteg emberek szabadon mozognak egymás között, tehát az egymással való találkozásaik száma arányos $x \cdot y$-nal. Mivel $x = 1 - y$, ezért

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0,$$

ahol $\alpha > 0$ arányossági tényező és $y_0$ a beteg egyének aránya a teljes populációban kezdetben.

(a) Határozzuk meg az egyensúlyi állapotokat és osztályozzuk őket aszerint, hogy asszimptotikusan stabilak vagy instabilak-e.

(b) Oldjuk meg a fenti kezdetiérték-problémát és ezáltal igazoljuk, hogy az előző pontban levont következtetésünk helyes volt. Bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$$

vagyis a betegség az egész populációt megfertőzi.

9. Bizonyos betegségek (pl. tífusz) többnyire hordozók által terjednek, vagyis olyan személyek által, akik terjesztik a betegséget, de a betegség szimptómái nem látszanak rajtuk. Jelentse $x$ azon egyének arányát az egész populációhoz viszonyítva akik megkaphatják a betegséget (de most még teljesen egészségesek) és legyen $y$ a hordozók aránya az egész populációhoz képest. Tegyük fel, hogy a hordozókat felfedezik és eltávolítják a populációból $\beta$ sebességgel. Vagyis

$$dy/dt = -\beta \cdot y. \tag{2}$$

(Időegység alatt az akkor éppen létező hordozók $\beta$-ad részét eltávolítják.) Tegyük fel, hogy a betegség terjedése arányos $x \cdot y$-nal (vagyis a hordozók és a megfertőzhető emberek szabadon találkoznak egymással). A

$$dx/dt = -\alpha xy. \tag{3}$$

(a) A (2) egyenletet megoldva határozzuk meg $y$-t mint a $t$ függvényét feltéve, hogy kezdetben $y(0) = y_0$.

(b) Az előző pont eredményét használva oldjuk meg a (3) egyenletet feltéve, hogy $x(0) = x_0$.

(c) Határozzuk meg a populáció azon egyéneinek az arányát, akik sohasem kapják meg a betegséget azáltal, hogy kiszámoljuk a

$$\lim_{t\to\infty} x(t)$$

határértékét.

**Eredmények és megoldások**

Ezek az egyenletek

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4}$$

alakú egyenletek, melyeknek megoldását a következőképpen kapjuk:

$$y_{i,\acute{a}lt} = Y_{h,\acute{a}lt} + y_{i,p}, \tag{5}$$

vagyis a (4) inhomogén egyenlet általános megoldása $y_{i,\acute{a}lt}$ egyenlő az

$$Y' + p(x)Y = 0 \tag{6}$$

homogén egyenlet általános megoldása $Y_{h,\acute{a}lt}$ plusz a (4) inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_{i,p}$.

1. (a) Itt $p(x) \equiv -1$; $q(x) = e^{-x}$. A megoldás két lépésbl áll:

   **1. lépés.** *A homogén rész az $Y' - Y = 0$ diff.egyenlet szétválasztható változójú és megoldása: $Y_{h,\acute{a}lt} = C \cdot e^x$.*

   **2. lépés.** *Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$-t. Ehhez meg szeretnénk határozni* egy *olyan $C(x)$ függvényt, amelyre*

   $$y = C(x) \cdot e^x$$

   *megoldása az $y' - y = e^{-x}$ egyenletnek. Visszahelyettesítés után kapjuk, hogy $C(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ egy ilyen függvény, tehát*

   $$y_{i,p} = C(x) \cdot e^x = -\frac{1}{2}e^{-x}.$$

   *Vagyis*

   $$y_{i,\acute{a}lt} = Y_{h,\acute{a}lt} + y_{i,p} = \underbrace{c \cdot e^x}_{Y_{h,\acute{a}lt}} + \left(\underbrace{-\frac{1}{2}e^{-x}}_{y_{i,p}}\right).$$

   (b) Itt $p(x) = -\frac{1}{x}$; $q(x) = x^2 + 3x - 2$. A megoldás két lépésből áll:

   **1. lépés.** *A homogén rész az $Y' - \frac{Y}{x} = 0$ diff.egyenlet, amely szétválasztható változójú és megoldása: $Y_{h,\acute{a}lt} = C \cdot x$.*

**2. lépés.** *Most keressük az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását, $y_{i,p}$-t. Ehhez szeretnénk határozni* egy *olyan $C(x)$ függvényt, amelyre*

$$y = x \cdot C(x)$$

*megoldása az $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ egyenletnek. Mivel $y' = C(x) + xC'(x)$, ezt behelyettesítve az $y' - \frac{y}{x} = x^2 + 3x - 2$ egyenletbe kapjuk, hogy*

$$C(x) + xC'(x) - C(x) = x^2 + 3x - 2.$$

*Innen: $C(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln|x|$ (itt nem kell feltüntetni az integrálból adódó konstanst, mert csak egy partikuláris megoldást keresünk). Tehát $y_{i,p} = x \cdot C(x) = \frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|$. Így*

$$y_{i,\acute{a}lt} = Y_{h,\acute{a}lt} + y_{i,p} = \underbrace{c\dot{x}}_{Y_{h,\acute{a}lt}} + \underbrace{\frac{x^3}{2} + 3x^2 - 2x\ln|x|}_{y_{i,p}}.$$

2. (a) Ld. 1. ábra

1. ábra. Megoldás a MAPLE használatával

(b) $\lim_{t\to\infty} y(t) = +\infty$ vagy $-\infty$ ($C$ előjelétől függően, lásd alább).

(c) $y(t) = -3e^t + C \cdot e^{2t}$, ezért

$$\lim_{t\to\infty} e^t(-3 + Ce^t) = +\infty, \quad \text{ha} \quad C > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} e^t(-3 + Ce^t) = -\infty, \quad \text{ha} \quad C \leq 0.$$

3. (a)

$$y(t) = (2te^t - 2e^t + 3)e^t$$

(b)

$$y(t) = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{3}t + \frac{1}{2} + \frac{1}{12t^2}$$

(c)

$$y(t) = 1 - \frac{1}{t} - 2\frac{e^{-t}}{t}$$

4. Megoldás: Legyen $y(t)$ az adalék mennyisége a tartályban a $t$ időpontban kg-ban mérve. Tudjuk, hogy $y(0) = 50$. A tartályban lévő benzin mennyisége a $t$ időpontban x(t)=(8000-20t)l.
Az adalék sebessége ki t időpontban:

$$\left(\frac{y}{8000 - 20t}\right) 180 =$$

$$= \frac{9y}{400 - t}.$$

Hiszen percenként 180 l folyadék távozik és 1 l folyadék

$$\frac{y}{8000 - 20t}$$

kg adalékot tartalmaz a t időpontban.
Az adalék sebessége be t időpontban:

$$0,25 * 160 = 40.$$

A mértékegység mindkét esetben kg/perc. A keverési eljárást jellemző differenciálegyenlet tehát:

$$\frac{dy}{dt} = 40 - \frac{9y}{400 - t}.$$

Az elsőrendű lineáris differenciálegyenlet megoldása:

$$y(t) = 5(400 - t) + C(400 - t)^9.$$

Mivel y(0)=50, így

$$C = -\frac{1950}{400^9}.$$

Innen

$$y(20) = 5(400 - 20) - \frac{1950}{400^9}(400 - 20)^9 \approx 671kg.$$

5. Az előző feladathoz hasonlóan egy keverési eljárást jellemző differenciálegyenletet kapunk, mely a következő alakú:

$$\frac{dy}{dt} = 1,2 - \frac{12y}{400 + 8t}.$$

Ennek megoldása:

$$y(t) = C(400 + 8t)^{-3/2} + (400 + 8t)0,06.$$

Az y(0)=0 kezdeti feltételt felhasználva:

$$y(50) = 48 + (-24 * 400^{3/2} * 800^{-3/2}) \approx 39,51kg.$$

2. ábra. Ha $f(y) > 0$, akkor $y(t)$ növekvő, ha $f(y) < 0$, akkor $y(t)$ csökkenő

6. (a) Ld. 2. ábra
   (b) $y \equiv 0$: instabil
   (c) $y \equiv 0$: aszimptotikusan instabil
7. (a) $2t + 5y > 0$ vagy $2t + 5y < 0$.
   (b) $1 - t^2 - y^2 > 0$ vagy $1 - t^2 - y^2 < 0$ (vagy a $t^2 + y^2 = 1$ egyenletű kör belseje, vagy a külseje).
   (c) Mindenütt teljesülnek a feltételek.
8. (a) Ld. 3. ábra

3. ábra. Ha $f(y) > 0$, akkor $y(t)$ növekvő, ha $f(y) < 0$, akkor $y(t)$ csökkenő

   (b) $y = y_0/[y_0+(1-y_0)e^{-\alpha t}] \to 1$, ha $t \to \infty$ (előbb-utóbb mindenki megbetegszik).
9. (a) $y = y_0 e^{-\beta t}$
   (b) $x = x_0 \exp[-\alpha y_0(1 - e^{-\beta t})/\beta]$
   (c) $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \exp[-\alpha y_0/\beta]$ (itt beáll egy beteg–egészséges arány, míg a hordozók aránya 0-ig csökken).