

1. Végtelen sorok

1. Bevezetés és definíciók

Bevezetesként próbáljunk meg az

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

végtelen összegnek értelmet adni. Mivel végtelen sokszor nem tudunk összeadni, emiatt csak az első n tagot adjuk össze: legyen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}},$$

a mértani sor összegképlete szerint. Ha n nagy, akkor $\frac{1}{2^n}$ már elhanyagolhatóan kicsi, ezért $s_n \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, emiatt természetes azt mondani, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2.$$

A továbbiakban

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

alakú ún. végtelen sorokat vizsgálunk, ahol az a_n -ek valós számok. Ezt a végtelen mértani sort a következőképpen jelöljük: $\sum a_n$.

1. definíció (Végtelen sor konvergenciája). A $\sum a_n$ végtelen sor n -edik részletösszege:

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Ha a részletösszegek sorozata az L számhoz konvergál, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = L,$$

akkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens és összege L . Egyébként a végtelen sort divergensnek mondjuk.

Példa: 1. Mutassa meg, hogy az

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

végtelen sor konvergens és összege 1.

Megoldás: Legyen

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Mivel $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ezért

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Innen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

2. Az

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

$|q| < 1$ esetén konvergens, egyébként divergens, mert

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{ha } q \neq 1$$

és $q^n \rightarrow 0$ akkor és csak akkor, ha $|q| < 1$.

Megjegyzés: A konvergencia definíciójából látszik, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciáján nem változtat az, ha véges számú tagot hozzáadunk vagy ha elveszünk.

1. tétel (Műveletek sorokkal). Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens sorok, továbbá $\sum a_n = A$ és $\sum b_n = B$, akkor

1. $\sum(a_n + b_n)$ is konvergens és $\sum(a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum(a_n - b_n)$ is konvergens és $\sum(a_n - b_n) = A - B$
3. $\sum ka_n$ is konvergens és $\sum ka_n = kA$, ahol k tetszőleges valós szám.

Bizonyítás: Csak 1.-et bizonyítjuk. A $\sum(a_n + b_n)$ n -edik részletösszege:

$$s_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) =$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = A_n + B_n.$$

Mivel $A_n \rightarrow A$ és $B_n \rightarrow B$, ezért $s_n \rightarrow A + B$. ■

Példa: Határozza meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ sorozat összegét! Megoldás:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{6}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{3}{6}} = \frac{3}{2},$$

a mértani sor összegképlete alapján.

2. Konvergenciakritériumok

A $\sum a_n$ végtelen sorral kapcsolatban két kérdés fogalmazható meg:

1. Konvergens-e a $\sum a_n$ végtelen sor?
2. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor mi az összege?

Az alábbi tétel egy szükséges feltételt ad a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciájára:

2. tétel. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Bizonyítás: Nyilván

$$\begin{aligned} a_n &= \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) &= \\ s_n - s_{n-1} \end{aligned}$$

Mivel a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = L$$

valamely valós L szám esetén. Így

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \\ L - L &= 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Következmény: Ha a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nem létezik vagy nem véges, akkor a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

Példák:

- $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ végtelen sor divergens, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ végtelen sor divergens, mert nem létezik a $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$.

Ha a $\sum a_n$ végtelen sor esetén $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, akkor lehet, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, de lehet, hogy divergens.

Példák:

- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ végtelen sor konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.
- A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens, mert

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \geq \\ 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} &= 1 + \frac{n}{2}, \end{aligned}$$

ezért a részletösszegek sorozata a $+\infty$ -hez tart.

A sorozatoknál tanultuk, hogy egy monoton növekvő sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos. Ennek a tételnek a következménye az alábbi:

3. tétel. Legyen $a_n \geq 0$ minden pozitív egész n esetén. Ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor pontosan akkor konvergens, ha az s_n részletösszegek sorozata korlátos.

A következő kritérium azt mutatja, hogy gyakran a végtelen sort egy alkalmas improprius integrállal összehasonlítva megválaszolhatjuk a konvergencia kérdését.

4. tétel (Integrálkritérium). Legyen a_n csupa pozitív tagból álló sorozat. Tegyük fel, hogy van olyan pozitív egész N és az $[N, \infty)$ félegyenesen csökkenő $f(x)$ függvény, amelyre $a_n = f(n)$ minden $n \geq N$ esetén. Ekkor a $\sum a_n$ végtelen sor és az $\int_N^{\infty} f(x) dx$ improprius integrál vagy egyszerre konvergens vagy egyszerre divergens.

Bizonyítás: A bizonyításban az $N = 1$ esetre szorítkozunk (az általános eset bizonyítása hasonlóan történik). Mivel $f(x)$ csökkenő, ezért $\int_{k-1}^k f(x) dx \geq a_k \geq$

$$\int_k^{k+1} f(x) dx, \text{ ha } k \geq 2. \text{ Ezért egyrészt}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &\geq \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx = \\ &\int_1^{n+1} f(x) dx \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n &\leq \\ a_1 + \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx &= \\ a_1 + \int_1^n f(x) dx \end{aligned}$$

azaz

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq s_n \leq a_1 + \int_1^n f(x) dx$$

Ebből látszik, hogy ha az $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergens, ami most azt jelenti, hogy $\int_1^n f(x) dx$ felülről korlátos, akkor s_n is felülről korlátos lesz, tehát konvergens. Másrészt, ha $\int_1^{\infty} f(x) dx$ divergens, akkor $\int_1^{n+1} f(x) dx$ nem lesz alulról korlátos, ezért s_n sem, tehát $\sum a_n$ is divergens. \blacksquare

Példa: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$, mivel $f(x) = \frac{1}{x^p}$ függvény monoton csökkenő ha $x \geq 1$; $f(n) = \frac{1}{n^p}$ és az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ impropius integrál a p -szabály alapján konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $0 < p \leq 1$.

5. tétel (Összehasonlító kritérium). Legyen $\sum a_n$ olyan végtelen mértani sor, ahol $a_n \geq 0$.

1. Ha van olyan konvergens $\sum c_n$ sor és N pozitív egész, hogy minden $n > N$ esetén $a_n \leq c_n$, akkor $\sum a_n$ végtelen sor is konvergens. (Majoráns kritérium)
2. Ha van csupa nemnegatív tagból álló divergens $\sum d_n$ végtelen sor és N pozitív egész szám, hogy minden $n > N$ esetén $a_n \geq d_n$, akkor $\sum a_n$ sor divergens. (Minoráns kritérium)

Bizonyítás: 1. Az $s_n = a_1 + \dots + a_n$, ($n \geq N$) részletösszegre felső korlát a

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

konvergens végtelen sor.

2. A $\sum a_n$ végtelen sornak nincs felső korlátja, mert ha lenne, akkor a

$$d_1 + d_2 + \dots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

felső korlátja lenne $\sum d_n$ részletösszegeinek, tehát $\sum d_n$ is konvergens lenne, ami ellentmondás. ■

Példa

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ sor konvergens, mert $0 \leq \frac{1}{2^n + n} < \frac{1}{2^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ végtelen sor konvergens.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n} + 1}$ végtelen mértani sor divergens, mert $\frac{1}{n - \sqrt{n} + 1} \geq \frac{1}{n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ végtelen sor divergens.

6. tétel (Limeszes összehasonlító kritériumok). Tegyük fel, hogy valamely pozitív egész N -re igaz, hogy $a_n > 0$ és $b_n > 0$, ha $n > N$. Ekkor

1. ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ egyszerre konvergensek vagy egyszerre divergens.

2. ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens.

3. ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ is divergens.

Bizonyítás. Csak 1.-et bizonyítjuk. A feltétel miatt létezik egy M egész, hogy $n > M$ esetén $|\frac{a_n}{b_n} - c| < \frac{c}{2}$, azaz

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$

$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$

$$\frac{c}{2} b_n < a_n < \frac{3c}{2} b_n.$$

Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum \frac{3c}{2} b_n$ is az, ezért az összehasonlító kritérium alapján $\sum a_n$ sor is az. Ha $\sum b_n$ sor divergens, akkor $\sum \frac{c}{2} b_n$ is az, emiatt az összehasonlító kritérium alapján $\sum a_n$ is divergens. ■

Példák

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 - \ln n}$ sor konvergens, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2 - \ln n}}{\frac{1}{n^2}} =$

2 és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens.

2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}$ végtelen sor divergens, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ végtelen sor divergens.

7. tétel (Hányadoskritérium). Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho.$$

Ekkor

1. ha $\rho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens;
2. ha $\rho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy $\rho < 1$. Ekkor létezik r , amelyre $\rho < r < 1$ és N pozitív egész, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$, ha $n \geq N$. Ekkor

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < r \Leftrightarrow a_{N+1} < r a_N$$

$$\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < r \Leftrightarrow a_{N+2} < r a_{N+1} < r^2 a_N$$

és általában pozitív egész m esetén

$$a_{N+m} < r^m a_N.$$

Ekkor az s_n részletösszeg felülről becsülhető a

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N + r a_N + r^2 a_N + \dots =$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \dots)$$

konvergens sorral, így $\sum a_n$ is konvergens.

2. Ha $\rho > 1$, akkor létezik N , hogy $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

ezért

$$a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \dots$$

ezért a sorozat tagjai nem tartanak a 0-hoz, így a $\sum a_n$ végtelen sor divergens.

3. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sorokra teljesül, hogy $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ és az első egy divergens, a második pedig egy konvergens sor. ■

Példák

1. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ végtelen sor konvergens, mert $a_n = \frac{2^n}{n!}$ és $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$, ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

2. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ végtelen sor divergens, mert $a_n = \frac{2^n}{n^2}$ és $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$ és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = 2 > 1.$$

8. tétel (Gyökkritérium). Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho.$$

Ekkor

1. ha $\rho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens;
2. ha $\rho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens;

3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

Bizonyítás:

1. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$, akkor egy rögzített $\rho < r < 1$ esetén létezik N , hogy $\sqrt[n]{a_n} < r$, azaz

$$a_n < r^n,$$

ha $n \geq N$, alkalmas pozitív egész N esetén. Meg kell mutatnunk, hogy az s_n , ($n \geq N$) részletösszegek felülről korlátosak. Nyilván:

$$s_n = a_1 + \dots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \dots + a_n <$$

$$a_1 + \dots + a_{N-1} + r^N + r^{N+1} + \dots + r^n \leq$$

$$a_1 + \dots + a_{N-1} + r^N + r^{N+1} + \dots \leq$$

$$a_1 + \dots + a_{N-1} + \frac{r^N}{1-r}.$$

2. Ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho > 1$, akkor létezik N , hogy $\sqrt[n]{a_n} > 1$, ha $n \geq N$, ezért $a_n > 1$, ha $n \geq N$ és így $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, ezért a $\sum a_n$ végtelen sor divergens. ■

Példa: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ végtelen sor konvergens, mert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

A következő tételben ún. alternáló sorokkal foglalkozunk. Legyenek $a_n > 0$. Ekkor az

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

váltakozó előjelű végtelen sort alternáló sornak mondjuk.

9. tétel (Leibniz-kritérium). A fenti alternáló sor konvergens, ha a_n monoton csökkenő és $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. A $2m$ -edik részletösszeg:

$$s_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m}).$$

Ekkor

$$s_{2(m+1)} = s_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}),$$

ahol a monoton csökkenés miatt $(a_{2m+1} - a_{2m+2}) \geq 0$. Így az s_{2m} sorozat monoton növekvő. Másrészt

$$s_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$$

$$\leq a_1,$$

megint csak a monoton csökkenés miatt. Mivel s_{2m} monoton nő és felülről korlátos, emiatt létezik a $\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m}$.

De

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} (s_{2m} + a_{2m+1}) =$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} s_{2m},$$

ezért létezik a véges $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. ■

Példa: A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

alternáló sor konvergens, mert $a_n = \frac{1}{n}$ monoton csökkenve tart a 0-hoz.

2. definíció. A $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

Példa A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

végtelen sor a Leibniz kritérium szerint konvergens, és a tagok abszolút értékét véve a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

is konvergens sor lesz az integrál kritérium szerint, tehát az eredeti sor abszolút konvergens.

3. definíció. A $\sum a_n$ konvergens végtelen sor feltételesen konvergens, ha $\sum |a_n|$ divergens.

Példa A

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

sor a Leibniz-kritérium szerint konvergens, de a tagok abszolút értékét véve a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

ún. harmonikus sor már divergens lesz az integrál-kritérium alapján.

10. tétel. Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás. Legyen

$$c_n = a_n + |a_n|.$$

Ekkor

$$0 \leq c_n \leq 2|a_n|$$

Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, emiatt $\sum 2|a_n|$ is konvergens és így az összehasonlító kritérium alapján $\sum c_n$ is konvergens végtelen sor. De

$$a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n| = c_n - |a_n|$$

és mivel két konvergens végtelen sor különbsége is konvergens, emiatt $\sum a_n$ is konvergens. ■