

3. gyakorlat - Fourier-sorok

2022. március 7.

1. Keresse meg az alábbi 2π szerint periodikus $f(x)$ függvények Fourier-sorát!

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{ha } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos x dx = \dots = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \cos nx dx = \dots = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } n = 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos x \sin nx dx = \dots = \frac{1}{\pi} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1}$$

A fenti integrálok kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozhatóak, vagy parciális integrálással számolhatóak. Az a_n -ra kapott formulából az is látható, hogy $b_n = 0 \forall$ páratlan n -re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\cos x}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \sin nx = \\ &= \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2 - 1} \sin 2kx \end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = |\sin x|$$

Az $f(x)$ függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = \dots = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\sin x| \cos nx = \dots = \frac{2}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2}$$

A fenti integrál kétféle módon számolható ki. A trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb, könnyen integrálható alakra hozható, vagy parciális integrálással számolható. Az a_n -ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páratlan n -re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2} \cos nx = \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 4k^2} \cos 2kx \end{aligned}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

Az $f(x)$ függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinus tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \dots = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx = \dots = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{2}{n\pi}, & \text{ha } n = 4k + 1 \\ -\frac{2}{n\pi}, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2l + 1} \cos(2l + 1)x$$

(d)

$$f(x) = (\pi - |x|)^2, \text{ ha } x \leq \pi$$

Az $f(x)$ függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinus tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 dx = \dots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)^2 \cos nx = \dots = \frac{4}{n^2}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos nx$$

(e)

$$f(x) = x^2, \text{ ha } |x| \leq \pi$$

Az $f(x)$ függvény páros, így Fourier-sorában csak konstans és cosinusos tagok vannak. Azaz $b_k = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dots = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx = \dots = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

A fenti integrálok elemiek, így egyszerűen számolhatóak. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Mivel $f(x)$ páratlan, ezért

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (\pi - x) \sin nx dx = \dots = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{ha } n = 4k + 1 \\ -\frac{4}{n\pi}, & \text{ha } n = 4k + 3 \end{cases}$$

Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$\frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$$

(g) Mennyivel egyenlő a következő végtelen sor (korábbi két feladat segítségével)? (d) és (e) feladat Fourier-sorába $x = 0$ -t helyettesítve a kerestt sor kifejezhető? és azt kapjuk, hogy:

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

2. Keresse meg az alábbi T szerint periódikus $f(x)$ függvények Fourier-sorát. (T=2 minden feladatban.)

(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \dots = \frac{1}{4}$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi}{2} x dx = \dots = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

$$b_n = \int_0^1 x \sin \frac{2n\pi}{2} x dx = \dots = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak. Az a_n -ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páros n -re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x + \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin n\pi x \right)$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása: $f(x)$ páratlan tehát $b_n = 0$. Továbbá

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx + \int_1^2 2 - x dx = \dots = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (2 - x) \cos \frac{2n\pi x}{2} dx = \dots = 2 \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak. Az a_n -ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páros n -re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos n\pi x = \frac{1}{2} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)\pi x$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók számolása:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi x dx = \dots = \frac{1}{\pi}$$

$$a_n = \int_0^1 \sin \pi x \cos \frac{2n\pi}{2} x dx = \dots = -\frac{1 + (-1)^n}{\pi(n^2 - 1)}$$

$$b_n = \int_0^1 \sin \pi x \sin \frac{2n\pi}{2} x dx = \dots =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } n = 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A fenti integrálok parciális integrálással számolhatóak vagy trigonometrikus azonosságok segítségével egyszerűbb alakra hozhatóak. Az a_n -ra kapott formulából az is látható, hogy $a_n = 0 \forall$ páratlan n -re. Tehát a Fourier-sor a következő alakú:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \pi x - \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^n)}{n^2 - 1} \cos n\pi x =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\pi x$$

3. Keresse meg az alábbi 2π szerint periódikus $f(x)$ függvények Fourier-sorát a lineárizáló formulák segítségével.

A feladat egyszerűen megoldható, hogy ha ismerjük a következő trigonometrikus azonosságokat:

$$\cos kx \cos lx - \sin kx \sin lx = \cos(k + l)x$$

$$\cos kx \cos lx + \sin kx \sin lx = \cos(k - l)x$$

$$\sin kx \cos lx + \cos kx \sin lx = \sin(k + l)x$$

$$\sin kx \cos lx - \cos kx \sin lx = \sin(k - l)x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

(a)

$$f(x) = \cos^2 x \sin x$$

$$F(x) = \frac{1 + \cos 2x}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3x - \sin x}{2} \right) = \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{4} \sin 3x$$

(b)

$$f(x) = \sin^2 x + \sin^3 x$$

$$F(x) = \frac{1 - \cos 2x}{2} + \sin x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 3x - \sin x}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{4} \sin x - \frac{\sin 3x}{4}$$

(c)

$$f(x) = \sin 5x(\sin 6x + \cos 3x)$$

$$F(x) = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 11x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{2}$$

(d)

$$f(x) = \cos^2 x \sin^2 x$$

$$F(x) = \frac{1}{4}(2 \sin x \cos x)^2 = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}$$