

1. Vektorterek

1. Bevezetés, definíció és altér

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer az

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

vektorokkal tömören úgy is írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_1x_1 + \underline{a}_2x_2 + \dots + \underline{a}_nx_n = \underline{b},$$

ahol az \underline{a}_i vektorok ún. m -dimenziós euklideszi vektorok. Az ilyen vektorok összességét \mathbb{R}^m -mel jelöljük. Ezek összeadását és skalárral való szorzását a 3-dimenzióban megszokott módon komponensenként végezzük el.

Ennek a fejezetnek a célja, hogy a 3-dimenziós vektorokat általánosítsuk, ebben az általánosításban a koordinátatengelyeket megértjük, és elérjük, hogy lehetőleg merőleges koordinátatengelyekkel rendelkezünk. Az általánosított tér neve vektortér:

1. definíció. Legyen V egy nemüres halmaz, amelyen két műveletet értelmezzünk:

- összeadás: minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -hez hozzárendelünk egy $\underline{u} + \underline{v}$ -vel jelölt V -beli elemet;
- skalárral való szorzás: minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$ -hoz hozzárendelünk egy $\alpha\underline{u}$ szintén V -beli elemet.

Ha ezek a műveletek rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal, akkor V -t valós vektortérnek mondjuk:

- minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in V$
- minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
- minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ esetén $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
- létezik nullelem: $\underline{0}$: minden $\underline{v} \in V$ esetén $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$;
- létezik inverz: minden $\underline{v} \in V$ esetén létezik $-\underline{v}$: $\underline{v} + (-\underline{v}) = \underline{0}$;
- minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$ esetén $\alpha\underline{u} \in V$;

- minden $\underline{v} \in V$ esetén $1\underline{v} = \underline{v}$;
- minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén $(\alpha\beta)\underline{v} = \alpha(\beta\underline{v})$;
- minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in V$ esetén $(\alpha + \beta)\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{v}$;
- minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén $\alpha(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\underline{u} + \alpha\underline{v}$.

Példák vektortérre:

- A valós komponensű m -dimenziós vektorok tere (\mathbb{R}^m) a szokásos összeadással, skalárral szorzással.
- A valós komponensű $m \times n$ -es mátrixok tere ($\mathbb{R}^{m \times n}$) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
- A legfeljebb n -edfokú valós együtthatós polinomok tere (P_n) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
- A legfeljebb n -edfokú valós együtthatós trigonometrikus polinomok tere (T_n) a szokásos összeadással, skalárral való szorzással.
- A minden $x \in \mathbb{R}$ esetén folytonos $f(x)$ függvények tere, ahol $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, és $(cf)(x) = cf(x)$.
- A konvergens $\sum a_n$ végtelen sorok a megismert összeadásra, skalárral való szorzásra.

Az alábbi tételek az axiómákból könnyen kiolvashatók:

- 1. tétel.** 1. Minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda\underline{0} = \underline{0}$.
- Minden $\underline{v} \in V$ esetén $0\underline{v} = \underline{0}$.
 - Minden $\underline{v} \in V$ esetén $(-1)\underline{v} = -\underline{v}$.

Bizonyítás: Csak 1.-et bizonyítjuk, a többi bizonyítása hasonlóan történik:

A 4. axióma szerint:

$$\lambda(\underline{v} + \underline{0}) = \lambda\underline{v},$$

ahol a bal oldal a 10. axióma szerint

$$\lambda\underline{v} + \lambda\underline{0} = \lambda\underline{v}.$$

Az 5. axióma szerint van a $\lambda\underline{v}$ -nek ellentettje, amit balról mindkét oldalhoz hozzáadva kapjuk:

$$-(\lambda\underline{v}) + (\lambda\underline{v} + \lambda\underline{0}) = -(\lambda\underline{v}) + \lambda\underline{v} = \underline{0}.$$

A 3. axióma szerint a baloldalt a következőképpen csoportosíthatjuk:

$$(-(\lambda\underline{v}) + \lambda\underline{v}) + \lambda\underline{0} = \underline{0},$$

ami az 5. és 2. axióma szerint

$$\underline{0} + \lambda\underline{0} = \underline{0}.$$

Végezetül a 4. és 2. axióma szerint

$$\lambda\underline{0} = \underline{0}. \quad \blacksquare$$

2. definíció. A V vektortér W részhalmaza altér, ha W részhalmaza V -nek és maga is vektortér a V -beli műveletekkel.

Két alteret biztosan tudunk: magát a V -t és a $\{0\}$. Ezeket triviális altérnek mondjuk. Az ezektől különböző altereket nevezzük V valódi altereinek.

Egy V vektortérben lévő W részhalmaz pontosan akkor alkot alteret, ha az összeadásra és a skalárral való szorzásra zárt.

2. tétel. A W altér V -ben akkor és csak akkor, ha

1. minden $\underline{u}, \underline{v} \in W$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in W$
2. minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in W$ esetén $\alpha \underline{v} \in W$.

Bizonyítás: Ha W altér, akkor az 1. és 6. axiómák szerint 1. és 2. teljesül.

Ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in W$ esetén $\underline{u} + \underline{v} \in W$ és minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{v} \in W$ esetén $\alpha \underline{v} \in W$, akkor az 1. és 6. axiómák nyilván teljesülnek. Mivel 2., 3., 7., 8., 9., 10. axiómák igazak V -ben, tehát most is. Mivel $0 \in \mathbb{R}$, ezért $\underline{v} \in W$ esetén $0 \underline{v} = \underline{0} \in W$, tehát van nullelem W -ben, ami 4.-et bizonyítja. Mivel $(-1) \underline{v} = -\underline{v}$, ezért ellentettünk is van, ami 5.-öt bizonyítja. ■

Példák altérre:

1. \mathbb{R}^3 -ben az origón átmenő síkok és egyenesek valódi alteret alkotnak.
2. \mathbb{R}^m -ben az olyan vektorok, amelyek utolsó koordinátája 0.
3. A mindenhol folytonos függvények vektorterében azok a függvények, amelyek mindenhol deriválhatók.
4. Legyen $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor a

$$V = \{ \underline{x} : x \in \mathbb{R}^n, \underline{A} \underline{x} = \underline{0} \}$$

altér \mathbb{R}^n -ben.

5. Legyen V egy vektortér és $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$. Ekkor

$$\{ \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k : \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

halmaz altér V -ben. A $\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k$ összeget lineáris kombinációnak hívják. Ezt a vektorteret a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$ vektorok által generált altérnek hívják. Jelölés:

$$\text{lin}\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \}.$$

Megmutatható, hogy ez a legszűkebb olyan altér amely tartalmazza $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in V$ vektorokat. Például \mathbb{R}^3 -ben a $\underline{v}_1 = (1, 0, 0)$ és $\underline{v}_2 = (0, 1, 0)$ vektorok által generált altér az xy sík.

3. definíció. A V vektortérnek a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \in V$ vektorok generátorrendszere (G), ha

$$\text{lin}\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \} = V$$

Példák:

(a) \mathbb{R}^3 -ben G:

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \underline{v}_2 = (0, 1, 0), \quad \underline{v}_3 = (0, 0, 1).$$

(b) P_n -ben G:

$$\underline{v}_1 = 1, \quad \underline{v}_2 = x, \underline{v}_3 = x^2, \dots, \underline{v}_{n+1} = x^n.$$

Ha

$$\text{lin}\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \} = V$$

és egy vektor pl. \underline{v}_m felírható a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\underline{v}_m = \mu_1 \underline{v}_1 + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_{m-1} \underline{v}_{m-1},$$

akkor

$$\begin{aligned} \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_m \underline{v}_m &= \\ \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_{m-1} \underline{v}_{m-1} + \\ \lambda_m (\mu_1 \underline{v}_1 + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_{m-1} \underline{v}_{m-1}) &= \\ (\lambda_1 + \lambda_m \mu_1) \underline{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda_m \mu_2) \underline{v}_2 + \dots + \\ + (\lambda_{m-1} + \lambda_m \mu_{m-1}) \underline{v}_{m-1}, \end{aligned}$$

ezért

$$\text{lin}\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \} = \text{lin}\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{m-1} \} = V$$

4. definíció. Ha a $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \} \in V$ olyan halmazok, amelyekre egyetlen \underline{v}_i vektor sem írható fel a többi lineáris kombinációjaként, akkor ezeket a vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük.

3. tétel. A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

egyenletnek csak a triviális: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ megoldása van.

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy van olyan

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0},$$

ahol valamely $\lambda_i \neq 0$. Ekkor

$$\underline{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \underline{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \underline{v}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \underline{v}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \underline{v}_k,$$

tehát a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok nem lineárisan függetlenek (ekkor azt mondjuk, hogy lineárisan összefüggők), ami ellentmondás.

Ha

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}$$

egyenletnek csak triviális van, akkor

$$\underline{v}_i = \mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_{i-1} \underline{v}_{i-1} + \mu_{i+1} \underline{v}_{i+1} + \dots + \mu_k \underline{v}_k$$

nem lehet, mert különben

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{i-1} v_{i-1} - v_i + \mu_{i+1} v_{i+1} + \dots + \mu_k v_k = \underline{0}$$

egy nemtriviális lineáris kombináció, ami ellentmondás. ■

Példa: \mathbb{R}^4 -ben a

$$v_1 = (3, 2, 0, 4), \quad v_2 = (4, 3, 2, 0), \quad v_3 = (1, 1, 1, 1)$$

vektorok lineárisan függetlenek.

A következő fogalom alapvető a vektorterek elméletében:

5. definíció. Legyen V egy vektortér. A $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, $v_i \in V$ bázisa V -nek, ha

- (a) B lineárisan független
- (b) B generátorrendszere V -nek.

Példák:

- (a) \mathbb{R}^m -ben bázis:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

ezt \mathbb{R}^m természetes bázisának hívjuk.

- (b) \mathbb{R}^2 -ben bázisok:

- i. természetes bázis:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ii. egy másik bázis:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (c)

$$P_n = \{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{R}\}$$

egy bázisa:

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

A V vektorteret véges dimenziósnek mondjuk, ha van véges sok vektorból álló bázisa; egyébként a vektortér végtelen dimenziós. Mi csak véges dimenziós vektorterekkel foglalkozunk. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha a V vektortér véges dimenziós, akkor két bázisnak ugyanannyi az elemszáma. Ez az alábbi tételre alapul:

4. tétel. Ha az

$$f_1, \dots, f_n$$

V vektortérbeli vektorok lineárisan függetlenek és

$$g_1, \dots, g_k$$

vektorok V generátorrendszerét alkotják, akkor

$$n \leq k.$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $n > k$ és ellentmondást abból kapunk, hogy megmutatjuk, hogy a

$$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = \underline{0}$$

egyenletnek nem csak triviális (minden $\lambda_i = 0$) megoldása van.

Mivel g_1, \dots, g_k generátorrendszert alkot, emiatt

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11} g_1 + a_{21} g_2 + \dots + a_{k1} g_k \\ f_2 &= a_{12} g_1 + a_{22} g_2 + \dots + a_{k2} g_k \\ &\vdots \\ f_n &= a_{1n} g_1 + a_{2n} g_2 + \dots + a_{kn} g_k, \end{aligned}$$

alkalmas $a_{ij} \in \mathbb{R}$ konstansokkal. Ekkor

$$\underline{0} = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n =$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1 (a_{11} g_1 + a_{21} g_2 + \dots + a_{k1} g_k) + \\ &\lambda_2 (a_{12} g_1 + a_{22} g_2 + \dots + a_{k2} g_k) + \end{aligned}$$

\vdots

$$\begin{aligned} &\lambda_n (a_{1n} g_1 + a_{2n} g_2 + \dots + a_{kn} g_k) = \\ &(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n}) g_1 + \\ &(\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n}) g_2 + \end{aligned}$$

\vdots

$$(\lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn}) g_k.$$

Ez biztosan teljesül, ha az együtthatók 0-k, azaz:

$$\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + \dots + \lambda_n a_{1n} = 0$$

$$\lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_n a_{2n} = 0$$

\vdots

$$\lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + \dots + \lambda_n a_{kn} = 0.$$

Mivel feltettük, hogy $n > k$, ezért ennek, a λ_i -ket tekintve ismeretleneknek, homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nemtriviális megoldása, ami ellentmondás. ■

5. tétel. Ha a véges dimenziós vektortérnek $B_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ és $B_2 = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ bázisai, akkor $n = m$.

Bizonyítás: Mivel B_1 bázis, ezért generátorrendszer is és mivel B_2 bázis, ezért lineárisan független. Ezért az előző tétel szerint

$$n \geq m$$

Másrészt mivel B_2 bázis, ezért generátorrendszer is és mivel B_1 bázis, ezért lineárisan független. Ezért az előző tétel szerint

$$m \geq n$$

Ez alapján

$$n = m \quad \blacksquare$$

Most már tudjuk értelmezni a vektortér dimenzióját:

6. definíció. Ha V egy véges dimenziós vektortér, akkor egy bázisban lévő vektorok számát a vektortér dimenziójának mondjuk. Jelölés: $\dim V$.

Példák:

- (a) $\dim \mathbb{R}^m = m$
- (b) $\dim \mathbb{R}^{m \times n} = mn$
- (c) $\dim P_n = n + 1$

A következő tétel egy aránylag könnyen ellenőrizhető feltételt ad arra, hogy ha tudjuk, hogy $\dim V = n$, akkor eldöntsük, hogy adott n db vektor bázist alkot-e.

6. tétel. Tegyük fel, hogy a V vektortérre $\dim V = n$. Ekkor

- (a) ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor bázist alkotnak;
- (b) ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok generátorrendszer, akkor egyben bázisok.

Bizonyítás: (a) Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Azt kell megmutatnunk, generátorrendszert alkotnak. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem alkot generátorrendszert, azaz létezik $\underline{v} \in V$, amelyre

$$\underline{v} \neq \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n.$$

Ekkor a

$$\underline{v}, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$$

vektorok lineárisan független rendszert alkotnak, mert ha

$$\mu_0 \underline{v} + \mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

akkor $\mu_0 = 0$ esetén

$$\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n = \underline{0},$$

ami csak triviális módon lehet, mivel $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek.

Míg ha $\mu_0 \neq 0$, akkor

$$\underline{v} = -\frac{\mu_1}{\mu_0} \underline{v}_1 - \dots - \frac{\mu_n}{\mu_0} \underline{v}_n,$$

ami nem lehetséges.

Ellentmondást úgy kapunk, hogy egy n dimenziós vektortérben van olyan generátorrendszer (egy bázis ilyen), amelyik n vektort tartalmaz, és itt nem lehet $n + 1$ lineárisan független vektor.

(b) Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ generátorrendszert alkot, akkor azt kell megmutatnunk, hogy egyben lineárisan független rendszer is. Ha nem így lenne, akkor lenne egy \underline{v}_i vektor, amely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Ekkor

$$V = \text{lin}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = \text{lin}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n\},$$

ezért V -nek van $n - 1$ vektort tartalmazó generátorrendszere, ami ellentmondás, mert van n vektort tartalmazó független vektorrendszer. \blacksquare

Mivel legtöbbször az \mathbb{R}^m térben dolgozunk, ezért most megmutatjuk, hogyan határozhatjuk meg itt

$$\text{lin}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$$

egy bázisát: Írjuk a vektorokat mint sorvektorok egymás alá egy mátrixba, majd alkalmazzuk a Gauss-eliminációt. Meggondolható, hogy a Gauss-eliminációnál alkalmazott lépések során a generált altér nem változik. A Gauss-elimináció végén kapott mátrix nemnulla sorai adják a generált altér bázisát.

Példa: Határozza meg \mathbb{R}^4 azon alterének egy bázisát, amelyet a

$$\underline{v}_1 = (1, 2, 3, 4), \quad \underline{v}_2 = (2, -1, 0, 3), \quad \underline{v}_3 = (3, 1, 3, 7)$$

vektorok generálnak.

A bázisok segítségével definiálhatjuk a koordináta fogalmát.

7. tétel. Ha $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ bázist alkotnak V -ben, akkor minden $\underline{v} \in V$ egyértelműen írható

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

alakba.

Bizonyítás: Mivel B generátorrendszert alkot ezért van legalább egy

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n$$

felírás. Tegyük fel, hogy van egy másik felírás:

$$\underline{v} = \alpha'_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha'_n \underline{b}_n.$$

Ekkor

$$\underline{0} = \underline{v} - \underline{v} = (\alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n) -$$

$$(\alpha'_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha'_n \underline{b}_n) =$$

$$(\alpha_1 - \alpha'_1) \underline{b}_1 + \dots + (\alpha_n - \alpha'_n) \underline{b}_n,$$

ami a lineáris függetlenség miatt csak úgy lehetséges, ha

$$\alpha_i = \alpha'_i \quad \blacksquare$$

7. definíció. Ha a véges dimenziós V vektortér egy bázisa $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$, akkor a $\underline{v} \in V$ vektor koordinátája

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ ha}$$

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \dots + \alpha_n \underline{b}_n.$$

Jelölés: $(\underline{v})_B$.

A következő példa mutatja, hogy miért van szükség különböző bázisokra:

Határozza meg azokat az (x, y) pontokat, amelyekre $x^2 + xy + y^2 = 1$.

A kérdés precízen a következő: Határozza meg az

$$\underline{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

természetes bázisban azon $x\underline{i} + y\underline{j}$ vektorokat, amelyekre $x^2 + xy + y^2 = 1$.

A feladatot úgy oldjuk meg, hogy más bázist választunk. Legyen

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}$$

$$\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}.$$

Ha ebben az új bázisban egy pont koordinátája (x', y') , akkor

$$x' \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \right) + y' \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \right) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \underline{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \underline{j}.$$

Ebben az új bázisban a feltétel így írható:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' \right)^2 = 1,$$

azaz

$$\frac{3}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 = 1.$$

Mivel az új bázis a természetes bázis 45° -kal történő elforgatottja, emiatt a keresett halmaz egy olyan ellipszis, amelynek tengelyei az $(\underline{i}, \underline{j})$ által meghatározott derékszögű koordinátarendszerben 45° ill. 135° -ot zárnak be.

Az előző példa is mutatja, hogy meg kell határoznunk, hogy két V -beli bázis esetén az egyikben meghatározott koordinátákból hogyan kapjuk meg a másik bázisban a koordinátákat. Ezt hívják báziscserének.

Legyen $B = \{\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n\}$ és $B' = \{\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_n\}$ két bázisa a V vektortérnek. Jelölje \underline{P} azt az $n \times n$ -es mátrixot, amelyik i -edik oszlopában a $(\underline{b}'_i)_B$ koordináták vannak. A \underline{P} mátrixot átmenet mátrixnak hívjuk. Megmutatható, hogy

$$(\underline{v})_{B'} = \underline{P}^{-1}(\underline{v})_B.$$

Példa: Legyen \mathbb{R}^2 két bázisa:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ekkor

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

és innen

$$\underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát például a $P(1,2)$ pont koordinátái B -ben $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ és a megfelelő mátrixszorzás után a B' -beli

koordináták $\begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$ lesznek.

Az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszert az

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

vektorokkal tömören úgy is írhatjuk, hogy

$$\underline{a}_1 x_1 + \underline{a}_2 x_2 + \dots + \underline{a}_n x_n = \underline{b}.$$

Ha az $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$ jelöli a természetes bázist \mathbb{R}^n -ben, akkor

$$\underline{b} = b_1 \underline{e}_1 + b_2 \underline{e}_2 + \dots + b_n \underline{e}_n.$$

Ha az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok az \mathbb{R}^n bázisai, akkor az egyenletrendszer megoldását báziscseréként is felfoghatjuk. Ekkor az átmenetmátrix az együtthatómátrix lesz és az $\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$ megoldást kapjuk.

Az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix esetén a sorvektorok \mathbb{R}^n -ből vannak. Az általuk generált altér a sortér; hasonlóan az oszlopvektorok \mathbb{R}^m -ből vannak. Az általuk generált altér az oszloptér. Megmuatható, hogy

$$\dim(\text{sortér}) = \dim(\text{oszloptér}).$$

8. definíció. Az \underline{A} mátrix rangja a sortér dimenziója. Jelölés: $\text{rang}(\underline{A})$.

Megmutatható, hogy az alábbi állítások ekvivalensek:

8. tétel. Az \underline{A} $n \times n$ -es mátrixok esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

- \underline{A} invertálható;
- az $\underline{Ax} = \underline{0}$ egyenletrendszernek csak az $\underline{x} = \underline{0}$ megoldása van;
- az \underline{A} elemi sorműveletekkel az \underline{I}_n egységmátrixszá transzformálható;
- az $\underline{Ax} = \underline{b}$ minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható;
- $\det \underline{A} \neq 0$;
- $\text{rang}(\underline{A}) = n$;
- \underline{A} sorai lineárisan függetlenek;
- \underline{A} oszlopai lineárisan függetlenek.

A fenti $\text{rang}(\underline{A})$ fogalom segítségével megadható egy szükséges és elégséges feltétel a lineáris egyenletrendszer megoldására:

9. tétel. Az alábbi állítások ekvivalensek:

- az $\underline{Ax} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható;
- a \underline{b} az \underline{A} oszloptérben van;
- $\text{rang}(\underline{A}|\underline{b}) = \text{rang}(\underline{A})$

2. Skalárszorzos vektorterek

Az \mathbb{R}^3 -ben megismert skalárszorzos mintájára természetes \mathbb{R}^n -ben a skalárszorzosat a következőképpen definiálni: Legyen

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Ekkor

$$\underline{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a skalárszorzosat rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

- $\underline{uv} = \underline{vu}$, minden $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$;
- $(\underline{u} + \underline{v})\underline{w} = \underline{uw} + \underline{vw}$ minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$
- $(\alpha \underline{u})\underline{v} = \alpha(\underline{uv})$ minden $\alpha \in \mathbb{R}, \underline{u}, \underline{v} \in V$
- $\underline{uu} \geq 0$ és $\underline{uu} = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$.

Ennek általánosításaként vezetjük be a skalárszorzosat:

9. definíció. Egy V vektortérben skalárszorzosnak nevezünk egy olyan műveletet, amely bármely $\underline{u}, \underline{v} \in V$ ponthoz egy $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ valós számot (más néven skalár számot) rendel hozzá a következő tulajdonságokkal:

- $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$, minden $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$;
- $\langle (\underline{u} + \underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle + \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$ esetén
- $\langle (\alpha \underline{u}), \underline{v} \rangle = \alpha \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ minden $\alpha \in \mathbb{R}, \underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén
- $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$ és $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$.

Példák:

- $V = \mathbb{R}^n$,

$$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \underline{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n).$$

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

-

$V = \{f(x) : 2\pi \text{ szerint periodikus folytonos függvény}\}$:

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

10. definíció. Ha V skalárszorzos vektortér, akkor egy $\underline{u} \in V$ vektor hossza:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$$

Példa: \mathbb{R}^n -ben az $\underline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ hossza:

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$$

Az \mathbb{R}^3 -ben az

$$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3),$$

$$\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

vektorok távolsága:

$$\|\underline{v} - \underline{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (v_i - u_i)^2}$$

Ennek általánosítása:

11. definíció. Ha V egy skalárszorozatos vektortér, akkor $\underline{u}, \underline{v} \in V$ közötti távolság:

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = \|\underline{v} - \underline{u}\|.$$

A következő cél két vektor által bezárt szöveget értelmezni. Ehhez szükséges az alábbi tétel:

10. tétel. Legyen V egy skalárszorozatos vektortér. Ekkor minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|.$$

Bizonyítás: Ha $\underline{u} = \underline{0}$, akkor mindkét oldal 0.

Tegyük fel, hogy $\underline{u} \neq \underline{0}$, akkor minden $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$0 \leq \|\underline{v} - t\underline{u}\| = \langle \underline{v} - t\underline{u}, \underline{v} - t\underline{u} \rangle =$$

$$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2t \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + t^2 \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle.$$

Mivel ez minden $t \in \mathbb{R}$ esetén igaz, ezért a diszkrimináns negatív, tehát

$$4 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^2 - 4\|\underline{u}\|^2 \cdot \|\underline{v}\|^2 \leq 0,$$

ezért

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle| \leq \|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|. \quad \blacksquare$$

A korábban bevezetett hosszúságnak az alábbi tulajdonságai vannak:

(a) $\|\underline{u}\| \geq 0$

(b) $\|\underline{u}\| = 0$ akkor és csak akkor, ha $\underline{u} = \underline{0}$

(c) $\|\alpha \underline{u}\| = |\alpha| \cdot \|\underline{u}\|$

(d) $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$

(d) bizonyítása:

$$\|\underline{u} + \underline{v}\|^2 = \langle \underline{u} + \underline{v}, \underline{u} + \underline{v} \rangle = \|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2 \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle \leq$$

$$\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{v}\|^2 + 2\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\| = (\|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|)^2 \quad \blacksquare$$

12. definíció. Legyen V egy skalárszorozatos vektortér. Az $\underline{u}, \underline{v} \in V$, $\underline{u}, \underline{v} \neq \underline{0}$ vektorok által bezárt szög α , ahol

$$\cos \alpha = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}.$$

A fenti definíció értelmes, mert

$$\left| \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \right| \leq 1.$$

13. definíció. Az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok ortogonálisak, ha

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0.$$

11. tétel. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ vektorok ($\underline{v}_i \neq \underline{0}$) páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.

Bizonyítás: Legyen

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k = \underline{0}.$$

Vegyük mindkét oldal \underline{v}_i -vel vett skalárszorozatát:

$$\langle \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle = \langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = 0.$$

Mivel tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = \langle \alpha \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = \alpha \langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle,$$

ezért

$$\langle \underline{0}, \underline{v}_i \rangle = 0.$$

De

$$\langle \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle =$$

$$\langle \lambda_1 \underline{v}_1, \underline{v}_i \rangle + \langle \lambda_2 \underline{v}_2, \underline{v}_i \rangle + \dots + \langle \lambda_k \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle =$$

$$\lambda_1 \langle \underline{v}_1, \underline{v}_i \rangle + \lambda_2 \langle \underline{v}_2, \underline{v}_i \rangle + \dots + \lambda_k \langle \underline{v}_k, \underline{v}_i \rangle = 0.$$

Az ortogonalitás miatt

$$\langle \underline{v}_j, \underline{v}_i \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ \|\underline{v}_i\|^2, & \text{ha } i = j \end{cases}$$

ezért

$$\lambda_i \|\underline{v}_i\|^2 = 0,$$

tehát

$$\lambda_i = 0. \quad \blacksquare$$

Példa: T_n -ben az

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx$$

függvények ortogonálisak a Fourier-soroknál tanultak szerint, ezért lineárisan függetlenek; továbbá nyilván generátorrendszert alkotnak, így bázist is.

2.1. Ortogonális bázisok

12. tétel. Legyen V egy véges dimenziós, skalárszorozatos vektortér, $\dim V = n$. Ennek van olyan $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ bázisa, ahol a vektorok páronként ortogonálisak.

Bizonyítás A bizonyítás során használt algoritmust Gram-Schmidt-féle ortogonalizációs eljárásnak hívják.

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ egy bázisa V -nek. Legyen

$$\underline{b}_1 = \underline{v}_1.$$

A második bázisvektort a következő alakban keressük:

$$\underline{b}_2 = \underline{v}_2 + \alpha_{21}\underline{b}_1,$$

ahol azt akarjuk, hogy \underline{b}_1 és \underline{b}_2 ortogonálisak legyenek. Ekkor

$$0 = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{v}_2 + \alpha_{21}\underline{b}_1 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{v}_2 \rangle + \alpha_{21} \langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle,$$

ezért

$$\alpha_{21} = -\frac{\langle \underline{b}_1, \underline{v}_2 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2}.$$

A következő bázisvektort

$$\underline{b}_3 = \underline{v}_3 + \alpha_{31}\underline{b}_1 + \alpha_{32}\underline{b}_2$$

alakban keressük. Azt akarjuk, hogy \underline{b}_3 ortogonális legyen \underline{b}_1 és \underline{b}_2 vektorokra. Ezért

$$0 = \langle \underline{b}_1, \underline{b}_3 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{v}_3 + \alpha_{31}\underline{b}_1 + \alpha_{32}\underline{b}_2 \rangle = \langle \underline{b}_1, \underline{v}_3 \rangle + \alpha_{31} \langle \underline{b}_1, \underline{b}_1 \rangle + \alpha_{32} \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle.$$

Mivel $\langle \underline{b}_1, \underline{b}_2 \rangle = 0$, ezért

$$\alpha_{31} = -\frac{\langle \underline{b}_1, \underline{v}_3 \rangle}{\|\underline{b}_1\|^2}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\alpha_{32} = -\frac{\langle \underline{b}_2, \underline{v}_3 \rangle}{\|\underline{b}_2\|^2}.$$

Ezt folytatva $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n$ páronként ortogonális vektorokhoz jutunk. Korábban bebizonyítottuk, hogy az ortogonalitásból következik a függetlenség, tehát dimenziószámnyi független vektort kaptunk, amiből következik, hogy bázist alkotnak. ■

13. tétel. Ha $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ egy ortonormált bázis az V -ben, akkor $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén, ha

$$(\underline{u})_B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

és

$$(\underline{v})_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle &= \langle u_1\underline{b}_1 + u_2\underline{b}_2 + \dots + u_n\underline{b}_n, v_1\underline{b}_1 + v_2\underline{b}_2 + \dots + v_n\underline{b}_n \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle. \end{aligned}$$

Mivel B ortonormált rendszer, ezért

$$\langle \underline{b}_i, \underline{b}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

Innen

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad \blacksquare$$

14. tétel. Legyen B_1 és B_2 két ortonormált bázis. Ha $\underline{P} = \underline{P}_{B_1, B_2}$ a bázisátmenet mátrix, akkor $\underline{P}^T = \underline{P}^{-1}$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy

$$\underline{P}^T \underline{P} = \underline{I}_n.$$

Legyen

$$B_2 = \{\underline{b}_1^{(2)}, \underline{b}_2^{(2)}, \dots, \underline{b}_n^{(2)}\}.$$

Ekkor a \underline{P}^T i -edik sorában a

$$(\underline{b}_i^{(2)})_{B_1}^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

és a \underline{P} j -edik oszlopában a

$$(\underline{b}_j^{(2)})_{B_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

lesz. Innen kapjuk, hogy $\underline{P}^T \underline{P}$ i -edik sorának j -edik oszlopában B_1 ONB tulajdonsága miatt

$$\begin{aligned} u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n &= \langle \underline{b}_i^{(2)}, \underline{b}_j^{(2)} \rangle = \\ &= \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

a B_2 ONB volta miatt, ami bizonyítja az állítást. ■

14. definíció. Ha \underline{A} olyan $n \times n$ -es mátrix, amelyre $\underline{A}^{-1} = \underline{A}^T$, akkor azt mondjuk, hogy \underline{A} ortogonális mátrix.

A definícióból látszik, hogy

15. tétel. Ha \underline{A} ortogonális $n \times n$ -es mátrix, akkor a sorvektorai és oszlopvektorai is ONB-t alkotnak \mathbb{R}^n -ben.

3. Lineáris transzformáció

15. definíció. Legyen V és W vektorterek, $T : V \rightarrow W$ pedig egy olyan függvény, amelyre

- (a) $T(\underline{u} + \underline{v}) = T(\underline{u}) + T(\underline{v})$, minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén
- (b) $T(\alpha \underline{u}) = \alpha T(\underline{u})$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$ és $\underline{u} \in V$ esetén.

Ekkor T -t lineáris transzformációnak nevezzük.

Példák:

(a) \mathbb{R}^2 :

i. Vetítés az x tengelyre:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. Tükrözés az $y = x$ egyenesre:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

iii. Forgatás 90° -kal:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

(b) \mathbb{R}^3 :

i. Tükrözés $\underline{0} - ra$:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ -u_3 \end{pmatrix}$$

ii. Vetítés az xy síkra:

$$T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Legyen

$$V = \{f(x) : f(x) \text{ mindenhol deriválható}\} :$$

$$T(f(x)) = f'(x)$$

(d) Legyen $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $T(\underline{x}) = \underline{A}\underline{x}$.

(e) Legyen $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ n -dimenziós sorvektorok. Képezzük belőle az $n \times n$ -es mátrixot. Ha az i -edik sort kivéve rögzítjük a sorvektorokat, akkor így egy

$$T(\underline{a}_i) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

függvényt kapunk. Ez egy lineáris transzformáció.

3.1. Determináns geometriai jelentése

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a determinánsnak mi a geometriai jelentése. Látni fogjuk, hogy az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ sorokat tartalmazó $n \times n$ -es determináns az ezen vektorok által meghatározott paralelepipedon előjeles térfogatát adja meg. Jelölje (a még nem definiált) térfogatot

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$$

Mit várunk el egy előjeles térfogattól?

Vizsgáljuk az \mathbb{R}^2 -et! Természetes feltevés, hogy

$$V(\underline{a}'_1 + \underline{a}''_1, \underline{a}_2) = V(\underline{a}'_1, \underline{a}_2) + V(\underline{a}''_1, \underline{a}_2)$$

Hasonlóan természetes, hogy

$$V(\alpha \underline{a}_1, \underline{a}_2) = \alpha V(\underline{a}_1, \underline{a}_2).$$

Ha az \mathbb{R}^3 -re tekintünk, akkor ott ha az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3$ vektorok egy síkban vannak, akkor

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3) = 0$$

ezért természetes azt elvárni egy előjeles térfogattól, hogy ha

$$\dim \text{lin}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\} < n \Rightarrow V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = 0$$

Végül természetes azt megkívánnunk, hogy az egységkocka térfogata 1 legyen, azaz, ha $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$ jelöli a természetes bázist, akkor

$$V(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) = 1.$$

Az alábbi tétel mutatja, hogy ezek a követelmények már egyértelműen meghatározzák az előjeles térfogatot és így éppen a determinánst kapjuk:

16. tétel. Legyen $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^n$. Ekkor ha a $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ függvényre teljesül, hogy

(a) $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ bármely vektorát kivéve a többit rögzítettnek vesszük, a kapott függvény lineáris transzformáció;

(b) ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ legfeljebb $n - 1$ dimenziós alteret alkot, akkor

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = 0;$$

(c) $V(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n) = 1$

akkor

$$V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) = \det(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n).$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy a determinánsra teljesülnek a megkívánt tulajdonságok, így csak azt kell megmutatnunk, hogy nincs más megfelelő $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ függvény. Először azt mutatjuk

meg, hogy két vektort felcserélve a $V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$ függvény előjelet vált. Tudjuk, hogy ha két megegyező vektorunk van, akkor az előjeles térfogat 0. Emiatt pl.

$$\begin{aligned} 0 &= V(\underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_1 + \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) = \\ &= V(\underline{a}_1, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) + V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) + \\ &= V(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) + V(\underline{a}_2, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) = \\ &= V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) + V(\underline{a}_2, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n). \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy legfeljebb egy megfelelő függvény van: Írjuk fel a természetes bázisban az \underline{a}_i -ket:

$$\begin{aligned} V(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \dots, \underline{a}_n) &= \\ V(a_{11}\underline{e}_1 + a_{12}\underline{e}_2 + \dots + a_{1n}\underline{e}_n, & \\ a_{21}\underline{e}_1 + a_{22}\underline{e}_2 + \dots + a_{2n}\underline{e}_n, \dots & \\ a_{n1}\underline{e}_1 + a_{n2}\underline{e}_2 + \dots + a_{nn}\underline{e}_n), & \end{aligned}$$

ami (b) alapján

$$\sum_{\substack{(m_1, m_2, \dots, m_n), \\ 1 \leq m_i \leq n}} a_{1m_1} a_{2m_2} \dots a_{nm_n} V(\underline{e}_{m_1}, \underline{e}_{m_2}, \dots, \underline{e}_{m_n}).$$

Az itt szereplő $V(\underline{e}_{m_1}, \underline{e}_{m_2}, \dots, \underline{e}_{m_n})$ viszont már egyértelműen meghatározott, mivel ha van két megegyező vektor itt, akkor az értéke 0, míg ha nincs, akkor sorcserékkel egységmátrixra hozható, ami szintén már előírja, hogy mi lehet csak. ■

3.2. Magtér, képtér

16. definíció. A $T : V \rightarrow W$ lineáris transzformáció magtere az összes olyan V -beli vektor, amelynek a képe a $\underline{0}$:

$$\text{Ker}(T) = \{\underline{v} : \underline{v} \in V, T(\underline{v}) = \underline{0}\}.$$

A $T : V \rightarrow W$ lineáris transzformáció képtere az összes olyan W -beli vektor, amely előáll képként:

$$\text{Im}(T) = \{\underline{w} : \underline{w} \in W, \text{ létezik } \underline{v} \in V, \text{ hogy } T(\underline{v}) = \underline{w}\}.$$

Példa: Legyen $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amelyik az x, y síkra vetít. Ekkor a magtér a z tengely, azaz

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

a képtér pedig maga az x, y sík:

$$\text{Im}(T) = \{(x, y, 0) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Megmutatható az alábbi tétel:

17. tétel. Tetszőleges $T : V \rightarrow W$ lineáris transzformáció esetén

$$\dim V = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

3.3. Lineáris leképezések mátrixa

A lineáris leképezés definíciójából látszik, hogy tetszőleges $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \in V$ vektorok és $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ valós számok esetén:

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_m \underline{v}_m) &= \\ T(\alpha_1 \underline{v}_1) + T(\alpha_2 \underline{v}_2) + \dots + T(\alpha_m \underline{v}_m) &= \\ \alpha_1 T(\underline{v}_1) + \alpha_2 T(\underline{v}_2) + \dots + \alpha_m T(\underline{v}_m) & \end{aligned}$$

A továbbiakban csak $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációval foglalkozunk.

Legyen

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$T(\underline{v}) = \sum_{i=1}^n v_i T(\underline{e}_i).$$

Tekintsük a következő $n \times n$ -es mátrixot:

$$\underline{\underline{T}} = (T(\underline{e}_1), T(\underline{e}_2), \dots, T(\underline{e}_n)).$$

Ekkor

$$T(\underline{v}) = \underline{\underline{T}} \underline{v}.$$

A $\underline{\underline{T}}$ mátrixot a T lineáris transzformáció természetes bázisban vett transzformációmátrixának hívjuk. Példák:

(a) \mathbb{R}^2 -ben 60° -kal forgatás az origó körül. Ekkor

$$T(\underline{e}_1) = \frac{1}{2}\underline{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_2$$

és

$$T(\underline{e}_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\underline{e}_1 + \frac{1}{2}\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) \mathbb{R}^2 -ben tükrözés az x tengelyre. Mivel

$$T_1(\underline{e}_1) = \underline{e}_1 = 1\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T_1(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + (-1)\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) \mathbb{R}^2 -ben tükrözés az y tengelyre. Mivel

$$T_2(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 = (-1)\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T_2(\underline{e}_2) = \underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + 1\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{\underline{T}}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) \mathbb{R}^2 -ben tükrözés az origóra. Mivel

$$T_3(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 = (-1)\underline{e}_1 + 0\underline{e}_2$$

és

$$T_3(\underline{e}_2) = -\underline{e}_2 = 0\underline{e}_1 + (-1)\underline{e}_2,$$

ezért

$$\underline{T}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Leellenőrizhető, hogy egy vektorra előbb T_1 , majd T_2 transzformációt alkalmazva éppen T_3 transzformációból származó vektort kapjuk. Ez a mátrixokra nézve a következőt jelenti: $\underline{T}_2\underline{T}_1 = \underline{T}_3$. Ez általában is igaz:

A definíció alapján könnyen látszik, hogy ha $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációk, akkor $T_2(T_1(\underline{v}))$ is lineáris transzformáció (T_3) és teljesül rájuk, hogy

$$\underline{T}_2\underline{T}_1 = \underline{T}_3.$$

A transzformációt nem csak a természetes bázisban vizsgálhatjuk. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ egy bázisa \mathbb{R}^n -nek és $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció. Ekkor T lineáris transzformáció B bázisban vett transzformációmátrixa:

$$\underline{T}_B = ((T(\underline{b}_1))_B, (T(\underline{b}_2))_B, \dots, (T(\underline{b}_n))_B).$$

Ekkor

$$(T(\underline{v}))_B = \underline{T}_B(\underline{v})_B$$

Hogyan kaphatjuk meg B_1 és B_2 bázisok esetén \underline{T}_{B_1} -ből \underline{T}_{B_2} -t? Tudjuk, hogy

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{T}_{B_1}(\underline{v})_{B_1},$$

$$(T(\underline{v}))_{B_2} = \underline{T}_{B_2}(\underline{v})_{B_2}.$$

Jelölje \underline{P} a bázisátmenet mátrixot. Ekkor

$$(\underline{v})_{B_2} = \underline{P}^{-1}(\underline{v})_{B_1},$$

azaz

$$(\underline{v})_{B_1} = \underline{P}(\underline{v})_{B_2}$$

és

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{P}(T(\underline{v}))_{B_2}.$$

Innen

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{T}_{B_1}(\underline{v})_{B_1} = \underline{T}_{B_1}\underline{P}(\underline{v})_{B_2},$$

másrészt

$$(T(\underline{v}))_{B_1} = \underline{P}(T(\underline{v}))_{B_2} = \underline{P}\underline{T}_{B_2}(\underline{v})_{B_2}$$

ezért

$$\underline{T}_{B_1}\underline{P}(\underline{v})_{B_2} = \underline{P}\underline{T}_{B_2}(\underline{v})_{B_2},$$

ami minden $(\underline{v})_{B_2}$ esetén teljesül, ezért

$$\underline{T}_{B_1}\underline{P} = \underline{P}\underline{T}_{B_2},$$

ahonnan

$$\underline{T}_{B_2} = \underline{P}^{-1}\underline{T}_{B_1}\underline{P}.$$

3.4. Diagonalizálás

17. definíció. Ha \underline{A} és \underline{B} $n \times n$ -es mátrixok és létezik \underline{P} invertálható $n \times n$ -es mátrix, hogy

$$\underline{B} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P},$$

akkor \underline{A} és \underline{B} mátrixokat hasonlóknak mondjuk.

A cél, hogy adott \underline{A} $n \times n$ -es mátrix esetén adjunk meg olyan \underline{P} $n \times n$ -es invertálható mátrixot, hogy $\underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P}$, szép legyen!

Mit értsünk "szép" mátrix alatt?

18. definíció. A \underline{D} $n \times n$ -es mátrix diagonális, ha a főátlón kívül minden elem 0, azaz

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ha

$$\underline{E} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{DE} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix},$$

emiatt

$$\underline{D}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m \end{pmatrix}.$$

19. definíció. Az \underline{A} $n \times n$ mátrix diagonalizálható, ha létezik \underline{P} invertálható $n \times n$ -es mátrix, amelyre egy diagonális \underline{D} mátrixra

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P}.$$

Próbáljunk adott \underline{A} mátrixhoz megfelelő \underline{P} mátrixot találni! A definíció alapján

$$\underline{PD} = \underline{AP}.$$

A \underline{P} oszlopvektorai legyenek:

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

Ekkor

$$\underline{\underline{PD}} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

másrészt

$$\underline{\underline{AP}} = (\underline{Ap}_1 | \underline{Ap}_2 | \dots | \underline{Ap}_n),$$

ezért

$$\underline{\underline{Ap}}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

20. definíció. Az \underline{A} $n \times n$ -es mátrix sajátértéke a λ valós szám, ha létezik $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektor, hogy

$$\underline{\underline{Ax}} = \lambda \underline{x}.$$

Ekkor \underline{x} -et sajátvektornak mondjuk.

Hogyan keressük meg a sajátértékeket, sajátvektorokat?

Nyilván

$$\underline{\underline{Ax}} = \lambda \underline{x} \Leftrightarrow \underline{\underline{Ax}} = \lambda \underline{I}_n \underline{x} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\underline{Ax}} - \lambda \underline{I}_n \underline{x} = \underline{0} \Leftrightarrow (\underline{A} - \lambda \underline{I}_n) \underline{x} = \underline{0}.$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer. Ennek pontosan akkor van nemtriviális ($\underline{x} \neq \underline{0}$) megoldása, ha

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}_n) = 0.$$

21. definíció. A

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}_n) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

polinomot karakterisztikus polinomnak hívjuk.

Példák:

(a)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

sajátértékei, sajátvektorai ($y = x$ egyenesre vetítés mátrixa a természetes bázisban)

(b) 45°-kal való forgatás mátrixa a természetes bázisban:

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A sajátvektorokkal már leírható, hogy egy $n \times n$ -es mátrix mikor diagonalizálható:

18. tétel. Az \underline{A} $n \times n$ -es mátrix akkor és csak akkor diagonalizálható, ha van n db független sajátvektora.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az \underline{A} $n \times n$ -es mátrix diagonalizálható, azaz létezik egy invertálható $n \times n$ -es \underline{P} mátrix, amelyre

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}},$$

ahol

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{PD}} = \underline{\underline{AP}}.$$

A \underline{P} oszlopvektorai legyenek:

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

Ekkor oszlopvektorok szerinti felírásban

$$\underline{\underline{PD}} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

másrészt

$$\underline{\underline{AP}} = (\underline{Ap}_1 | \underline{Ap}_2 | \dots | \underline{Ap}_n),$$

azaz \underline{p}_i -ik sajátvektorok ($\underline{p}_i \neq \underline{0}$, mert \underline{P} invertálható) és \underline{p}_i -k lineárisan függetlenek szintén az invertálhatóság miatt.

Most tegyük fel, hogy \underline{A} -nak létezik n db lineárisan független sajátvektora. Legyenek ezek:

$$\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n,$$

és

$$\underline{\underline{Ap}}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

Legyen \underline{P} az a mátrix, amelynek oszlopvektorai $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$:

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n).$$

és legyen

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{\underline{AP}} = (\underline{Ap}_1 | \underline{Ap}_2 | \dots | \underline{Ap}_n).$$

és

$$\underline{\underline{PD}} = (\lambda_1 \underline{p}_1 | \lambda_2 \underline{p}_2 | \dots | \lambda_n \underline{p}_n),$$

így

$$\underline{\underline{AP}} = \underline{\underline{PD}}.$$

Mivel a \underline{p}_i -k lineárisan függetlenek, emiatt \underline{P} invertálható, ezért

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}. \quad \blacksquare$$

A fenti tétel szerint a diagonalizálás során az \underline{A} $n \times n$ -es mátrixhoz keresünk n db lineárisan független sajátvektort:

$$\underline{A}p_i = \lambda_i p_i.$$

Ekkor

$$\underline{P} = (p_1 | p_2 | \dots | p_n).$$

és

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

mátrixokkal

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P}.$$

Példa: Diagonalizáljuk az

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

mátrixot!

Megoldás:...

Mire használhatjuk a diagonalizálást? Ha az \underline{A} mátrix diagonalizálható, akkor könnyen számolhatóak az \underline{A} hatványai:

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \Rightarrow \underline{A} = \underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1},$$

ezért

$$\begin{aligned} \underline{A}^m &= (\underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1})(\underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}) \dots (\underline{P} \underline{D} \underline{P}^{-1}) = \\ &= \underline{P} \underline{D} (\underline{P}^{-1} \underline{P}) \underline{D} (\underline{P}^{-1} \underline{P}) \underline{D} \dots (\underline{P}^{-1} \underline{P}) \underline{D} \underline{P}^{-1} = \\ &= \underline{P} \underline{D}^m \underline{P}^{-1}, \end{aligned}$$

de ebben a szorzatban már mindent ismerünk. A következő itt nem bizonyított tétel egy elégséges feltételt ad arra, hogy mikor diagonalizálható egy mátrix:

19. tétel. Az \underline{A} $n \times n$ -es mátrix diagonalizálható, ha \underline{A} -nak n db különböző sajátértéke van.

4. Kvadratikus alakok

A sajátértékek alkalmazásaként végül olyan kérdéseket vizsgálunk meg, hogy az

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 1$$

vagy

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz = 1$$

milyen görbéket ill. felületeket ír le. Először nézzük meg, hogyan kapcsolódik ez a lineáris

algebrához!

Legyen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + (a_{12} + a_{21})xy.$$

Ha

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})xy + (a_{13} + a_{31})xz + (a_{23} + a_{32})yz.$$

Általában, ha

$$\underline{A} = (a_{ij})_{n \times n}$$

és

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

akkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$(a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + \dots$$

$$\dots + (a_{n-1,n} + a_{n,n-1})x_{n-1}x_n$$

A középiskolában tanultuk, hogy az

$$Ax^2 + By^2 = 1$$

egyenlet vagy ellipszist vagy hiperbolát ír le. A célunk az, hogy egy

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$$

ún. kvadratikus alakban az x_i -ket úgy transzformáljuk:

$$y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \dots + c_{in}x_n,$$

amelyre

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = \underline{y}^T \underline{D} \underline{y}$$

teljesül valamely \underline{D} diagonális mátrixszal. Legyen

$$\underline{x} = \underline{P} \underline{y}.$$

Ekkor

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = (\underline{P}y)^T \underline{A} (\underline{P}y) = y^T \underline{P}^T \underline{A} \underline{P} y,$$

ezért

$$\underline{D} = \underline{P}^T \underline{A} \underline{P},$$

másrészt a diagonalizálás azt adja, hogy

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P},$$

ezért

$$\underline{P}^T = \underline{P}^{-1},$$

azaz \underline{P} ortogonális mátrix

22. definíció. Az \underline{A} $n \times n$ -es mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha létezik egy \underline{P} $n \times n$ -es ortogonális mátrix, amelyre

$$\underline{D} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P},$$

valamely diagonális \underline{D} mátrix esetén. Bebonyítható:

20. tétel. Az \underline{A} $n \times n$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, akkor és csak akkor, ha \underline{A} szimmetrikus mátrix.

Mivel minden kvadratikus alak felírható

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 +$$

$$+ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

alakban, emiatt minden kvadratikus alakhoz található \underline{A} szimmetrikus mátrix, amelyre a kvadratikus alak

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$$

alakú, ezért minden kvadratikus alak diagonalizálható.

Hogyan diagonalizálható egy

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x} = 1$$

egyenlet?

(a) A kvadratikus alakot írjuk

$$\underline{x}^T \underline{A} \underline{x}$$

alakba, ahol \underline{A} szimmetrikus mátrix

(b) Határozzuk meg azt a

$$\underline{P} = (\underline{p}_1 | \underline{p}_2 | \dots | \underline{p}_n)$$

mátrixot, amely ortogonálisan diagonalizálja \underline{A} -t. Ekkor

$$\underline{A} \underline{p}_i = \lambda_i \underline{p}_i.$$

(c) Ekkor a $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \dots, \underline{p}_n$ által meghatározott új koordinátarendszerben a keresett egyenlet:

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

Példa:

(a) Határozza meg az

$$x^2 + xy + y^2 = 1$$

megoldását!

(b) Határozza meg a

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 1$$

megoldását!