

# 1. Fourier-sorok

## 1. Bevezetés és definíciók

Ennek a fejezetnek a célja, hogy egy  $2\pi$  szerint periodikus függvényt felírjunk mint trigonometrikus függvényekből képzett függvénysorként. Nyilván a  $\cos x$  és a  $\sin x$  függvények  $2\pi$  szerint periodikus függvények és általában tetszőleges  $k$  egész szám esetén a  $\cos kx$  és a  $\sin kx$  függvények szintén  $2\pi$  szerint periodikus függvények, továbbá az ezekből formált

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ún. trigonometrikus polinomok is tetszőleges  $a_0, a_k, b_k$  valós számok esetén  $2\pi$  szerint periodikus függvényt adnak. Ennek a fejezetnek a célja a  $2\pi$  szerint periodikus függvényt felírni

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

függvénysorként.

A továbbiakban feltesszük, hogy a  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$  Riemann-integrálható a  $[0, 2\pi]$  intervallumban. Először az  $f(x)$ -et a

$$f_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus polinommal közelítjük. Az együtthatókat úgy választjuk, hogy a következő, összesen  $2n + 1$  feltétel teljesüljön:

1.  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) dx$
2.  $\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$
3.  $\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n$

Az első feltételből a következőt kapjuk:

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) dx =$$

$$\left[ a_0 x + \sum_{k=1}^n a_k \frac{\sin kx}{k} - b_k \frac{\cos kx}{k} \right]_0^{2\pi} = 2\pi a_0,$$

ezért

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$$

Az  $a_k, b_k$  együttható meghatározásához szükségünk lesz a következő integrálokra:

1. Ha  $k \neq l$  pozitív egészek, akkor

(a)

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lxdx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(k+l)x + \cos(k-l)x dx =$$

$$\left[ \frac{\sin(k+l)x}{k+l} + \frac{\sin(k-l)x}{k-l} \right]_0^{2\pi} = 0$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lxdx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(k-l)x - \cos(k+l)x dx =$$

$$\left[ \frac{\sin(k-l)x}{k-l} - \frac{\sin(k+l)x}{k+l} \right]_0^{2\pi} = 0$$

(c)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lxdx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(k+l)x + \sin(k-l)x dx =$$

$$\left[ -\frac{\cos(k+l)x}{k+l} - \frac{\cos(k-l)x}{k-l} \right]_0^{2\pi} = 0$$

2. Ha  $k = l$ , akkor

(a)

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2} dx =$$

$$\left[ \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2kx}{4k} \right]_0^{2\pi} = \pi;$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2kx}{2} dx =$$

$$\left[ \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2kx}{4k} \right]_0^{2\pi} = \pi.$$

(c)

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2kx dx =$$

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\cos 2kx}{2k} \right]_0^{2\pi} = 0$$

A fentieket használva már meg tudjuk határozni az  $a_k$  és  $b_k$  együtthatókat:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) \cos kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \left( a_0 + \sum_{l=1}^n (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \right) \cos kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a_0 \cos kx + \sum_{l=1}^n (a_l \cos lx \cos kx + b_l \sin lx \cos kx) dx = \pi a_k,$$

ezért

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

Hasonlóan kapjuk a  $b_k$  együtthatókat:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \int_0^{2\pi} f_n(x) \sin kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \left( a_0 + \sum_{l=1}^n (a_l \cos lx + b_l \sin lx) \right) \sin kx dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a_0 \sin kx + \sum_{l=1}^n (a_l \cos lx \sin kx + b_l \sin lx \sin kx) dx = \pi b_k,$$

ezért

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Az előbb kapott együtthatók nem függenek  $n$ -től, emiatt természetes a következő  $2\pi$  szerint periodikus függvénnyel közelíteni a  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$ -et:

**1. definíció.** A  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$  Fourier-sora:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Példa: Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 2, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

függvényt!

Megoldás: Nyilván

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 dx \right) = \frac{3}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} 1 \cos kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 \cos kx dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \left[ \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} + \left[ 2 \frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) = 0$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} 1 \sin kx dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 \sin kx dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \left[ -\frac{\cos kx}{k} \right]_0^{\pi} + \left[ -2 \frac{\cos kx}{k} \right]_{\pi}^{2\pi} \right) =$$

$$\frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi}.$$

Így a nemnulla együtthatók:

$$a_0 = \frac{3}{2}, b_{2k-1} = \frac{-2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

azaz a Fourier sor:

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$$

## 2. Fourier-sor részletösszegei

A következő tétel azt mondja ki, hogy a Fourier-sor részletösszege a legkisebb átlagos hibanevezet tulajdonságú.

**1. tétel.** Legyen az  $f(x)$   $2\pi$  szerint periodikus függvény, az  $n$ -edik részletösszege:  $s_n(x)$ . Legyen

$$t_n(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

tetszőleges  $\alpha_0, \alpha_k, \beta_k$  valós együtthatókkal. Ekkor minden  $n \geq 1$  esetén

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \leq \int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))^2 dx$$

és egyenlőség csak akkor teljesül, ha  $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$ .

**Bizonyítás:** Nyilván

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))^2 dx &= \\ \int_0^{2\pi} f^2(x) dx + \int_0^{2\pi} t_n^2(x) dx - 2 \int_0^{2\pi} f(x) t_n(x) dx. \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) t_n(x) dx &= \\ \int_0^{2\pi} f(x) \left( \alpha_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right) dx &= \\ \alpha_0 \int_0^{2\pi} f(x) dx + \\ \sum_{k=1}^n \left( \alpha_k \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx + \beta_k \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right) &= \\ 2\pi \alpha_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k). \end{aligned}$$

A  $t_n(x)$  definíciójából könnyű ellenőrizni, hogy:

$$\int_0^{2\pi} t_n^2(x) dx = 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Ezért

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(x) - t_n(x))^2 dx &= \int_0^{2\pi} f^2(x) dx + 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) - \\ 2 \left( 2\pi \alpha_0 a_0 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k a_k + \beta_k b_k) \right) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx + 2\pi (\alpha_0 - a_0)^2 + \pi \sum_{k=1}^n ((\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2) - \\ \left( 2\pi \alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right), \end{aligned}$$

aminek a minimuma  $\alpha_0 = a_0, \alpha_k = a_k, \beta_k = b_k$  esetén lesz, ahonnan már következik a tétel. ■

A minimum esetén:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx &= \\ \int_0^{2\pi} f^2(x) dx - \left( 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right), \end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geq 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

Mivel ez minden  $n \geq 1$  esetén igaz, ezért

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx \geq 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

A következő, itt nem bizonyított állítás azt mondja ki, hogy itt egyenlőség áll:

**2. tétel** (Parseval-formula). Ha a  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$  Riemann-integrálható a  $[0, 2\pi]$  intervallumban, akkor

$$\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

Ebből már következik, hogy négyzetes átlagban a részletösszeg közel van az  $f(x)$  függvényhez:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx = 0.$$

Példa: A Parseval formulát használjuk az

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi, \\ 2, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

függvény esetén!

Megoldás: Tudjuk, hogy a nem-nulla Fourier-együtthatók:

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad b_{2k-1} = \frac{-2}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ezért

$$5\pi = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) =$$

$$4, 5\pi - \frac{4\pi}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

ahonnan rendezés után

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

### 3. Fourier-sor pontonkénti konvergenciája

A következőkben arra keressünk választ, hogy a fent kapott Fourier-sor milyen feltételek esetén állítja elő az  $f(x)$   $2\pi$  periodikus függvényt. Ehhez szükség van a következő definícióra:

**2. definíció.** Az  $f(x)$  függvény szakaszosan folytonos az  $I$  intervallumon, ha véges sok pont kivételével az  $f(x)$  folytonos és ahol szakadása van, ott létezik a bal és jobboldali határérték.

A fenti definícióra támaszkodva már megadhatjuk, hogy a Fourier-sor milyen kapcsolatban van az  $f(x)$ -szel.

**3. tétel.** Tegyük fel, hogy az  $f(x)$  és  $f'(x)$  függvények szakaszosan folytonosak a  $[0, 2\pi]$ -ben. Ekkor a Fourier-sor értéke az  $f(x)$  folytonossági pontjaiban megegyezik  $f(x)$ -szel, míg szakadási pontokban a bal és jobboldali határérték átlagát veszi fel.

A fenti, nem bizonyított tétel következménye:

**Következmény:** Ha a  $2\pi$  szerint periodikus  $f(x)$  függvény olyan, hogy a  $[0, 2\pi]$  intervallum felbontható véges sok intervallumra úgy, hogy egy részintervallumon a függvény monoton és folytonos, a szakadási pontokban létezik a bal ill. jobboldali határérték, akkor a Fourier-sor előállítja a függvényt az  $f(x)$  folytonossági pontjaiban és a szakadási helyeken a Fourier-sor az  $f(x)$  ottani bal és jobboldali határérték átlagát veszi fel.

**Példák:**

1. (a) Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = x, \quad \text{ha } 0 < x < 2\pi$$

$2\pi$  szerint periodikus függvényt!

(b) Határozza meg  $f(2k\pi)$  értékeit úgy, hogy  $f(x)$  mindenhol folytonos legyen!

Megoldás: A határozott integrál definíciója alapján:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \pi,$$

továbbá

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \left[ x \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin kx}{k} dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{2\pi} = 0,$$

és

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( \left[ -x \frac{\cos kx}{k} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\frac{\cos kx}{k} dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left( -2\pi \frac{\cos(2k\pi)}{k} + \left[ \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{2\pi} \right) = -\frac{2}{k}.$$

Így a Fourier-sor:

$$\pi - 2 \left( \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

A konvergenciáról szóló tétel alapján az  $f(2k\pi) = \pi$  választás kell ahhoz, hogy a Fourier-sor előállítsa a függvényt a szakadási helyen.

Megjegyezzük, hogy az  $x = \frac{\pi}{2}$  helyettesítés a következőt adja:

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - 2 \left( \sin \pi + \frac{\sin 2\pi}{2} + \frac{\sin 3\pi}{3} + \dots \right) =$$

$$\pi - 2 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots \right),$$

ezért

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots,$$

ami nem olyan meglepő, mivel tanultuk, hogy

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots \quad \text{ha } -1 < x < 1,$$

ami a fentiek alapján  $x = 1$  (és  $x = -1$ ) esetén is igaz.

2. Fejtsük Fourier-sorba az

$$f(x) = \sin^3 x$$

függvényt!

Olyan  $a_0, a_k, b_k$  valós számokat kell találnunk, amelyekkel

$$\sin^3 x = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

A linearizációs formulák szerint:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \sin x =$$

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x =$$

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{4} (\sin 3x + \sin(-x)) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x,$$

azaz a nemnulla Fourier-együtthatók:  $b_1 = \frac{3}{4}$  és  $b_3 = -\frac{1}{4}$ .

#### 4. Páros és páratlan függvények

Az alábbiakban azt gondoljuk meg, hogy páros és páratlan függvények esetén hogyan egyszerűsödik le az együtthatók kiszámítása.

A továbbiakban felhasználjuk, hogy ha  $g(x)$  egy  $2\pi$  szerint periodikus függvény, akkor a  $[\pi, 2\pi]$  intervallumon vett integrál megegyezik a  $[-\pi, 0]$  intervallumon vett integrállal, ezért

$$\int_0^{2\pi} g(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx.$$

1. Legyen  $f(x)$  egy páros függvény. Ekkor  $f(x)$  párossága miatt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$$

továbbá  $f(x) \cos kx$  párossága miatt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

Mivel  $f(x) \sin kx$  páratlan, ezért

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0.,$$

tehát a Fourier-sor nem tartalmaz szinuszos tagokat, emiatt ezt a Fourier-sort tiszta koszinuszos Fourier-sornak mondjuk.

2. Most legyen  $f(x)$  egy páratlan függvény. Ekkor  $f(x)$  páratlansága miatt

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0,$$

továbbá  $f(x) \cos kx$  páratlansága miatt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0$$

Mivel  $f(x) \sin kx$  páros, ezért

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

emiatt ez a Fourier-sor csak szinuszos tagokat tartalmaz, ezért ezt tiszta szinuszos Fourier-sornak mondjuk.

#### Példák:

1. Fejtsük tiszta szinuszos Fourier-sorba az

$$f(x) = x(\pi - x) \quad 0 \leq x \leq \pi$$

függvényt!

Megoldás: A függvényt a  $[-\pi, 0]$  intervallumon úgy egészítjük ki, hogy a  $[-\pi, \pi]$  intervallumban páratlan legyen. Erre a függvényre már alkalmazhatom a fenti képleteket. A részleteket mellőzve a következőt kapjuk

$$b_{2k} = 0$$

$$b_{2k-1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin(2k-1)x dx = \frac{8}{(2k-1)^3 \pi},$$

azaz

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right)$$

2. Magyarázza meg, hogy a korábban kiszámolt

$$f(x) = x, \quad 0 < x < 2\pi$$

$2\pi$  szerint periodikus függvény Fourier-sora miért nem tartalmaz koszinuszos tagot!

Megoldás: Tekintsük a  $g(x) = f(x) - \pi$  függvényt. Ez már páratlan lesz, emiatt az ő Fourier-sora csak szinuszos tagokat tartalmaz. Ehhez a Fourier-sorhoz hozzáadva  $\pi$ -t megkapjuk  $f(x)$  Fourier-sorát.

## 5. $T$ szerint periodikus függvények Fourier-sora

Tegyük fel, hogy  $f(x)$  egy  $T$  szerint periodikus, a  $[0, T]$ -ben Riemann integrálható függvény. Ekkor őt a következő alakú Fourier-sorba fejthetjük:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{T}x + b_k \sin \frac{2k\pi}{T}x,$$

ahol

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx,$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2k\pi}{T}x dx$$

és

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2k\pi}{T}x dx.$$

A konvergenciára hasonló tétel mondható ki, mint ami a  $2\pi$  szerint periodikus függvényekre vonatkozik. A részleteket mellőzzük.