MATEMATIKA A2 VIZSGA, ELMÉLETI KÉRDÉSEK ÉS VÁLASZOK:

1. (*a*) ***Definiálja a $\sum a_n$ végtelen sor konvergenciáját!***
   (*b*) ***Adjon szükséges feltételt arra, hogy $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen!***

(*a*): A $\sum a_n$ végtelen sor n-edik részletösszege: $\mathrm{s_n} = \mathrm{a_1} + \mathrm{a_2} + \cdots + \mathrm{a_n}$. Ha a részletösszegek szorzata az L számhoz konvergál, azaz $\lim\limits_{\mathrm{n}\to\infty} \mathrm{s_n} = \mathrm{L}$, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens és összege L. Egyébként a végtelen sort divergensnek mondjuk.

(*b*): Az egyetlen szükséges feltétel az: ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. (*a*) ***Mondja ki a pozitív tagú $\sum a_n$ végtelen sorra vonatkozó hányadoskritériumot!***
   (*b*) ***Mondja ki a pozitív tagú $\sum a_n$ végtelen sorra vonatkozó gyökkritériumot!***

(*a*): Legyen $\sum \mathrm{a_n}$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.
Ekkor:
1. ha $\rho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens;
2. ha $\rho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

(*b*): Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$.
Ekkor:
1. ha $\rho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens;
2. ha $\rho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens;
3. ha $\rho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

3. ***Mondja ki az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz-tételt!***

Legyenek $a_n > 0$. Ekkor az $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + -$ váltakozó előjelű végtelen sort alternáló sornak mondjuk. A fenti alternáló sor konvergens, ha a_n monoton csökkenő és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

4. (*a*) ***Definiálja a $\sum f_n(x)$ függvénysort!***
   (*b*) ***Definiálja a $\sum f_n(x)$ függvénysor konvergenciatartományát!***

(*a*): Legyenek $f_n(x),\ n = 1,2,\ldots$ olyan függvények, amelyek közös értelmezési tartománya I. Ekkor a belőlük képzett függvénysoron az $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ \ldots$ kifejezést értjük, ahol $x \in I$.
Egy konkrét $x_0 \in I$ értéket behelyettesítve a következő végtelen sort kapjuk: $f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots$ Ez vagy konvergens, vagy divergens.

(*b*): Azon $x_0 \in I$ számok halmazát, amelyekre $f_1(x_0) + f_2(x_0) + \cdots + f_n(x_0) + \ldots$ konvergens sor, az $f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \ldots$ függvénysor konvergenciatartományának mondjuk.

5. **Definiálja a $\sum a_n\,(x-a)^n$ hatványsor konvergenciasugarát és mondja ki hogyan lehet ennek segítségével kiszámítani a konvergenciatartományt!**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ hatványsor konvergenciatartománya a következőképpen nézhet ki:

1. Létezik $R > 0$, hogy ha $|x - a| < R$, akkor konvergens a hatványsor, míg, ha $|x - a| > R$, akkor konvergens. Külön kell meggondolni az $x = a \pm R$ számok esetén a konvergenciát; eszerint a konvergenciatartomány egy nyílt vagy félig nyílt, félig zárt, vagy egy zárt intervallum lehet.
2. A sor csak az $x = a$ esetén konvergens, egyébként divergens.
3. A sor minden valós szám esetén konvergens.

A fenti tételben szereplő R-et konvergenciasugárnak hívjuk. Ha létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ határérték, akkor a konvergenciasugarat könnyű meghatározni:

1. Ha létezik a $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} < \infty$ határérték, akkor $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.
2. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 0$, akkor a konvergenciatartomány a valós számok halmaza.
3. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \infty$, akkor a konvergenciatartomány az $\{a\}$, azaz a hatványsor csak $x = a$ esetén konvergens.

6. (*a*) ***Definiálja az $f(x)$ függvény $x = a$ helyén vett Taylor sorát!***
   (*b*) ***Adjon szükséges feltételt arra, hogy az $f(x)$ függvény Taylor-sora az $f(x)$ függvényt állítsa elő!***

(*a*): Legyen $f(x)$ egy olyan függvény, amelyik végtelen sokszor differenciálható egy olyan intervallumban, amelynek belső pontja a. Az $f(x)$ függvény által generált Taylor-sor az $x = a$ helyen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

(*b*): Ha létezik M konstans, amellyel x és a közötti valamennyi t esetén $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \le M$, akkor a Taylor-tételben szereplő $R_n(x)$ maradéktag kielégíti az $|R_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ egyenlőséget. Amennyiben ez a feltétel teljesül minden n-re, akkor $f(x)$ Taylor-sora $f(x)$-et állítja elő.

7. **Definiálja az $f(x)$ 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát!**

A 2π szerint periodikus $f(x)$ Fourier-sora: $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, ahol $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx$

8. (*a*) **Definiálja az előjeles aldetermináns fogalmát!**
   (*b*) **Mondja ki a Kifejtési tételt!**

(*a*): Az előjeles aldetermináns fogalmának definíciója: $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

(*b*): Legyen $\underline{A} = (a_{ij})_{n\times n}$, jelölje C_{ij} az előjeles aldeterminánsokat. Ekkor minden $1 \le i \le n$ esetén: $\det \underline{A} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$ és minden $1 \le j \le n$ esetén: $\det \underline{A} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$.

Az első képlet használatánál azt mondjuk, hogy az i-edik sor szerint fejtjük ki a determinánst, míg a második képletet használva a szóhasználat az,

hogy a j-edik oszlop szerint fejtjük ki. Mindig olyan sor vagy oszlop szerint érdemes kifejteni, amelyik a lehető legtöbb *0*-t tartalmazza, mert így a lehető legtöbb olyan szorzat lesz, ahol az egyik tényező *0*, tehát ezeket le sem kell írni.

9. (*a*) **Definiálja az $\underline{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ mátrix inverzét!**
   (*b*) **A determináns fogalmát használva adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy az $\underline{\boldsymbol{A}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ mátrix invertálható legyen!**

(*a*): Az $\underline{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrixot invertálhatónak mondjuk, ha létezik $\underline{X} = (x_{ij})_{n\times n}$ mátrix, amelyre $\underline{XA} = \underline{AX} = \underline{I_n}$. [Jelölés: $\underline{A}^{-1}$]
Megjegyzések:
1. Legfeljebb egy inverz létezhet, mert ha $\underline{X_1}$ és $\underline{X_2}$ inverzei $\underline{A}$-nak, akkor:
   $\underline{X_1} = \underline{I_n}\underline{X_1} = (\underline{X_2}\underline{A})\underline{X_1} = \underline{X_2}(\underline{AX_1}) = \underline{X_2}$.
2. Megmutatható, hogy elég csak az $\underline{AX} = \underline{I_n}$ és $\underline{XA} = \underline{I_n}$ feltételek közül az egyiket kikötni, ez már maga után vonja a másik tejesülését.
3. Nem négyzetes mátrixnak nem értelmezzük az inverzét.

(*b*): Egy $\underline{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix akkor és csak akkor invertálható, ha $det\,\underline{A} \neq 0$.

10. (*a*) **Definiálja a $\boldsymbol{V}$ vektortérben a bázis fogalmát!**
    (*b*) **Definiálja a $\boldsymbol{V}$ vektortérbeli $\underline{\boldsymbol{b_1}}, \dots, \underline{\boldsymbol{b_n}}$ bázis esetén a $\underline{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{V}$ vektortér koordinátáit!**

(*a*): A V vektortérben a $\underline{b_1}, \underline{b_2}, \dots, \underline{b_n}$ vektorok bázist (B) alkotnak, ha minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen írható $\underline{v} = \alpha_1\underline{b_1} + \alpha_2\underline{b_2} + \dots + \alpha_n\underline{b_n}$ alakban, ahol $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

(*b*): Ha a véges dimenziós V vektortér egy bázisa $B = \{\underline{b_1}, \dots, \underline{b_n}\}$ akkor a $\underline{v} \in V$ vektor koordinátája: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, ha $\underline{v} = \alpha_1\underline{b_1} + \dots + \alpha_n\underline{b_n}$. [Jelölés: $(\underline{v})_B$]

11. (*a*) **Definiálja a $\boldsymbol{V}$ vektortérben a lineáris függetlenség és generátorrendszer fogalmakat!**
    (*b*) **Adjon szükséges és elégséges feltételt a bázis tulajdonságára a lineáris függetlenség és generátorrendszer fogalmát használva!**

(*a*): A $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}, \dots, \underline{v_k}\} \in V$ vektorokat lineárisan függetlennek nevezzük, ha a $\lambda_1\underline{v_1} + \lambda_2\underline{v_2} + \dots + \lambda_k\underline{v_k} = \underline{0}$ egyenlet csak a triviális $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ esetben teljesül.
A V vektortérnek a $\underline{g_1}, \underline{g_2}, \dots, \underline{g_m} \in V$ vektorok generátorrendszere (G), ha $lin\{\underline{g_1}, \underline{g_2}, \dots, \underline{g_m}\} = V$, azaz minden $\underline{v} \in V$ vektor $\underline{v} = \alpha_1\underline{g_1} + \alpha_2\underline{g_2} + \dots + \alpha_m\underline{g_m}$ alakba írható.

(*b*): Legyen V egy vektortér. A $B = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \dots, \underline{b_n}\}, \underline{b_i} \in V$ akkor és csak akkor bázisa V-nek, ha:
1. B lineárisan független
2. B generátorrendszere V-nek.

12. (*a*) **Mit mondhatunk két $\boldsymbol{V}$-beli bázis elemszámáról?**
    (*b*) **Definiálja a $\boldsymbol{V}$ vektortér dimenzióját!**

(*a*): Ha a véges dimenziós vektortérnek $B_1 = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ és $B_2 = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m\}$ bázisai, akkor $n = m$.

(*b*): Ha V egy véges dimenziós vektortér, akkor az egy bázisban lévő vektorok számát a vektortér dimenziójának mondjuk. [Jelölés: $dim\, V$]

13. (*a*) **Mikor mondjuk, hogy a $\boldsymbol{V}$ skalárszorzatos vektortérben az $\underline{\boldsymbol{u}}$ és $\underline{\boldsymbol{v}}$ vektorok ortogonálisak?**
    (*b*) **Definiálja az ortonormált bázis fogalmát!**

(*a*): Egy V skalárszorzatos vektortérben az $\underline{u}, \underline{v}$ vektorok ortogonálisak, ha $< \underline{u}, \underline{v} >= 0$.

(*b*): Ha a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n\}$ bázis olyan, hogy a benne szereplő vektorok páronként ortogonálisak és minden benne szereplő vektorra $\|\underline{b}_i\| = 1$, akkor B-t ortonormált bázisnak (ONB) hívjuk.

14. (*a*) **Definiálja az $\boldsymbol{f(x,y)}$ függvény $\boldsymbol{(x_0, y_0)}$-ban vett $\boldsymbol{x}$-szerinti parciális deriváltját!**
    (*b*) **Mi a geometriai jelentése a fenti parciális deriváltnak?**

(*a*): Az $f(x,y)$ függvény (x_0, y_0) pontjában vett x-szerinti parciális deriváltja: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$. [Jelölés: $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, vagy $f'_x(x_0, y_0)$]. Az x-szerinti parciális deriváltat úgy számoljuk, hogy y-t konstansnak tekintjük és x-szerint deriválunk, az egyváltozós függvényeknél megszokott szabályok szerint.

(*b*): Legyen az $f(x,y)$ függvény egy belső pontja (x_0, y_0). Tekintsük az xy síkban lévő $y = y_0$ egyenesnek az értelmezési tartományba eső részét. Ennek a képe a felületen lévő görbe, mely az $\{(x, x_0, z) : x, z \in\}$ síkban vannak. Ennek a görbének az (x_0, y_0) pontban vett érintőjének meredekségét értelmezhetjük a fenti parciális derivált segítségével.

15. (a) **Definiálja az $\boldsymbol{f(x,y)}$ függvény gradiensét!**
    (b) **Mi a geometriai jelentése a gradiensnek?**

(*a*): Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény mindkét parciális deriváltja létezik az (x_0, y_0) pontban Ekkor a $gradf = (f'_x, f'_y)$ vektort gradiensvektornak hívjuk. [Másik jelölése: ∇f]

(*b*): A fenti gradienst segítségül hívhatjuk ahhoz, hogy meghatározzuk, hogy melyik irányba kapjuk a legnagyobb iránymenti deriváltat, azaz, hogy megkapjuk merre emelkedik legjobban a felület. Jelölje γ a $gradf$ és a $\underline{v}$ vektorok közötti szöget. Ekkor a skalárszorzat definíciója szerint: $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}} = |gradf||\underline{v}| \cos\gamma = |gradf| \cos\gamma$, ami akkor maximális, ha $\gamma = 0$, azaz, ha $\underline{v}$ a $gradf$ irányába mutató egységvektor. Hasonlóan kapjuk, hogy a legkisebb iránymenti derivált $-gradf$ irányába mutat.

16. (*a*) **Definiálja az $\boldsymbol{f(x,y)}$ függvény lokális szélsőértékét!**
    (*b*) **Hogyan lehet meghatározni az $\boldsymbol{f(x,y)}$ függvény lokális szélsőértékeit?**

(*a*): Az $f(x,y)$ függvény egy (x_0, y_0) belső pontjában lokális minimuma (/maximuma) van, ha létezik egy olyan (x_0, y_0)-t tartalmazó kis kör, hogy minden abban lévő (x,y) pont esetén $f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$ $(/f(x,y) \leq (x_0, y_0))$.

Megjegyzés:
Ha egy (x_0, y_0) pontban szélsőérték van és ott létezik érintősík, akkor ott az vízszintes, ami azt jelenti, hogy $f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$

(*b*): A lokális szélsőértékek megkeresése két lépésből áll $f(x, y)$ mindenhol legalább kétszer parciálisan differenciálható függvények esetén:

1. Megkeressük a kritikus pontokat az $f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$ egyenletrendszer megoldásával. Így kapjuk a $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ pontokat.
2. Felírjuk az ún. Hesse-determinánst: $H = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{bmatrix}$ és megvizsgáljuk a P_i pontokban.

A fenti vizsgálatok elvégzése után, ha:

1. $H(x_i, y_i) > 0$, akkor: I. $f''_{xx}(x_i, y_i) > 0$ esetén lokális minimuma van P_i-ben.
   II. $f''_{xx}(x_i, y_i) < 0$ esetén lokális maximuma van P_i-ben.
2. $H(x_i, y_i) < 0$, akkor nincs szélsőérték, ún. nyeregpont van.
3. $H(x_i, y_i) = 0$, akkor további vizsgálatra van szükség.

17. (*a*) Definiálja az $f(x, y)$ függvény kettős integrálját a D tartományon!
(*b*) Mi a fenti kettős integrál geometriai jelentése?

(*a*): Legyen $f(x, y)$ egy $D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartományon értelmezett függvény. Ekkor $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ és $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ esetén létezik a $\lim\limits_{\substack{n,m\to\infty \\ max\{\Delta x_i, \Delta y_j\}\to 0}} \sum_{i,j} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\, \Delta A_{ij}$ határérték, akkor ezt $f(x, y)$ kettős integrálnak mondjuk. [Jelölés: $\iint_D f(x, y)\, dA$ vagy $\iint_D f(x, y)\, dxdy$]

(*b*): A fenti kettős integrál geometriai vonatkozásai:

1. Ha $f(x, y) > 0$ folytonos függvény, akkor $\iint_D f(x, y)\, dA$ az $f(x, y)$ felület és az xy sík között található rész térfogatát számolja ki.
2. Ha $f(x, y)$ folytonos függvény D-ben, akkor $\iint_D f(x, y)\, dA$ az $f(x, y)$ függvény előjeles térfogatát számolja ki, azaz az $f(x, y) > 0$ rész térfogatából kivonja az $f(x, y) < 0$ rész térfogatát.

18. (*a*) Definiálja az $f(x, y, z)$ függvény hármas integrálját a D tartományon!
(*b*) Mi a fenti hármas integrál fizikai jelentése pozitív függvény esetén?

(*a*): Az $f(x, y, z)$ függvény hármas integrálható a $D \subseteq \mathbb{R}^3$ tartományon, ha létezik a $\lim\limits_{\substack{n,m,p\to\infty \\ max\{\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k\}\to 0}} \sum_{i,j,k} f(\xi_{ijk}, \eta_{ijk}, \delta_{ijk}) \Delta V_{ijk}$ határérték. [Jelölés: $\iiint_D f(x, y, z) dV$, vagy $\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$]

(*b*): Ha $f(x, y, z) dV \geq 0$, akkor $\iiint_D f(x, y, z) dV$ a D test tömegét számolja ki, ahol $f(x, y, z)$ a test sűrűségét jelenti.