Matematika A2

9. feladatsor megoldása

1. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix hasonló a $\underline{\underline{B}}$ $n \times n$-es mátrixhoz, ha létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Jelölés: $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$. Bizonyítsa, be, hogy

   (a) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}} \Rightarrow \underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{A}}$
   A bizonyítás a definíció alapján történik. $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$, azaz létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Ezt a kifejezést átalakíthatjuk. Jobbról szorzunk a $\underline{\underline{P^{-1}}}$ mátrixszal, míg balról szorzunk a $\underline{\underline{P}}$ mátrixszal. Így a következőt kapjuk:

   $$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{PP^{-1}APP^{-1}}} = \underline{\underline{PBP^{-1}}} = \underline{\underline{\left(P^{-1}\right)^{-1} BP^{-1}}}$$

   Azaz ebben az esetben a $\underline{\underline{P^{-1}}}$ lesz az a bizonyos invertálható mátrix, ami létezik.

   (b) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{A}}$
   Keresnünk kell egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrixot,amire teljesül a definíció. Ezen hasonlóság belátásához a $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$ mátrix lesz a megfelelő. Így ezzel teljesülni fog a definíció és a fenti tulajdonság.

   (c) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{C}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{C}}$
   A bizonyítás itt is a definíció segítségével történik. $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$, azaz létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Emellett $\underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{C}}$, azaz létezik egy $\underline{\underline{Q}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Q^{-1}BQ}}$. Ha itt használjuk a $\underline{\underline{B}}$ mátrixra ismert azonosságot, a következőt kapjuk:

   $$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Q^{-1}P^{-1}APQ}} = \underline{\underline{(PQ)^{-1}A(PQ)}}$$

2. Mely $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrixokra teljesül, hogy $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{I_n}}$ ($\underline{\underline{I_n}}$ az egységmátrixot jelöli)?

   Defínicó alapján létezik egy P invertálható mátrix, amire:

   $$\underline{\underline{I_n}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}},$$

   vagyis

   $$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{PI_nP^{-1}}} = \underline{\underline{PP^{-1}}} = \underline{\underline{I_n}}.$$

   Tehát $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I_n}}$.

3. Bizonyítsa be, hogy adott mátrix esetén egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak!

   A sajátvektor defínicójából belátható, hogy két sajátvektor összege szintén sajátvektor (ugyanazzal a sajátértékkel), valamint egy sajátvektor skalárszorosa is. Tehát egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok tere összeadásra és skalárszorzásra zárt, így alteret alkotnak.

4. Bizonyítsa be, hogy két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor összege nem sajátvektor!

   Tegyük fel, hogy v_1 sajátvektor λ_1-hez, v_2 sajátvektor λ_2-höz, ahol $\lambda_1 \neq \lambda_2$ és $v_1 + v_2$ sajátvektor λ-hoz, azaz $\underline{\underline{A}}v_1 = \lambda_1 v_1$, $\underline{\underline{A}}v_2 = \lambda_2 v_2$, $\underline{\underline{A}}(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2)$. Ebb?l azt kapnánk, hogy

   $$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda(v_1 + v_2).$$

   Vagyis $(\lambda_1 - \lambda)v_1 + (\lambda_2 - \lambda)v_2 = 0$. Mivel legalább az egyik együttható nem 0, ez azt jelenti, hogy v_1 és v_2 lineárisan összefüggő, azaz egymás konstansszorosai. De ekkor (az előző feladat alapján) a két vektor ugyanahhoz a sajátértékhez tartozik.

5. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!
A feladat megoldását csak az első esetben részletezem. A megoldás módszere a további részfeladatokban is ugyanaz lenne, de ott csak a végeredményt írom le.

   (a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$
   A mátrix sajátértékének kiszámításához először is meg kell határoznunk a karakterisztikus polinomot. Azaz
   $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)$$
   A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. Azaz ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = -1$.
   A sajátvektorok meghatározása a következőek alapján történik: $(\underline{\underline{A}} - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$
   $\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:
   $$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Ezt a fenti egyenletrendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $4v_1 = 0$, azaz $v_1 = 0$, v_2 értéke pedig tetszőleges.
   Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:
   $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Ezt a fenti egyenletrendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $8v_1 = 4v_2$, azaz $2v_1 = v_2$.
   Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
   Karakterisztikus polinom:
   $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(-2-\lambda) + 36 = \ldots = (\lambda - 4)^2$$
   A mátrixnak tehát egy sajátértéke van, amely kétszeres. A sajátérték: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.
   A sajátvektorok meghatározása:
   $$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Ezt a fenti egyenletrendszert kell megoldani, és ennek két egymástól különböző megoldását megkeresni.
   Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
   A karakterisztikus polinom:
   $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. Azaz ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$; $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$.

$\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

A karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 7 = \lambda^2 + 3$$

A mátrix sajátértékei most komplexek lesznek: $\lambda_1 = i\sqrt{3}$; $\lambda_2 = -i\sqrt{3}$.

Komplex sajátértékek esetén a sajátvektorok is komplexek. Ugyan a feladat csak a valós sajátértékeket s sajátvektorokat kérte, de azért a végeredményt ideírom: $\lambda_1 = i\sqrt{3}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -\frac{7}{i\sqrt{3}+2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -i\sqrt{3}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -\frac{7}{-i\sqrt{3}+2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(e) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

A mátrixnak tehát egy sajátértéke van, amely kétszeres. A sajátérték: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

A sajátvektorok meghatározása estén azt tapasztaljuk hogy v_1, v_2 egyaránt szabadon megválasztható, így csak két független megoldást kell keresnünk.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(f) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

A mátrixnak tehát egy sajátértéke van, amely kétszeres. A sajátérték: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

A sajátvektorok meghatározása esetén két független megoldást kell keresnünk.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!

Itt is az előző feladathoz hasonlóan járok el. Azaz a feladat megoldását csak az első esetben részletezem. A megoldás módszere a további részfeladatokban is ugyanaz lenne, de ott csak a végeredményt írom le.

(a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A mátrix sajátértékének kiszámításához először is meg kell határoznunk a karakterisztikus polinomot. Azaz

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 6 - 11\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. A gyököket ilyen esetben próbálgatással (1,2,-1,-2 gyökök-e) vagy azonos átalakítással célszerű megkeresni. Ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.
A sajátvektorok meghatározása a következőek alapján történik: $(\underline{\underline{A}} - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenletrendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $3v_1 + v_3 = 0, -2v_1 = 0$, azaz $v_1 = 0$, $v_3 = 0$, v_2 értéke pedig tetszőleges.
Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenletrendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $2v_1 + v_3 = 0, -2v_1 - v_2 = 0, -2v_1 - v_3 = 0$, azaz $v_3 = -2v_1$, $v_2 = -2v_1$.
Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenletrendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $v_1 + v_3 = 0, -2v_1 - 2v_2 = 0, -2v_1 - 2v_3$, azaz $v_1 = -v_3$, $v_1 = v_2$.
Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$\det(B-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 2\lambda - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

$\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = \sqrt{2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{2}-3} \\ \frac{3+\sqrt{2}}{7(\sqrt{2}+1)} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -\sqrt{2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \frac{-5}{-\sqrt{2}-3} \\ \frac{3-\sqrt{2}}{7(-\sqrt{2}+1)} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

A karakterisztikus polinom:

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -6 & -2-\lambda & 0 \\ 19 & 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -8 - \lambda - 8\lambda^2 - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. (Itt is vannak komplex sajátértékek. Felírom a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, de a feladat csak a valós sajátértékek és sajátvektorok kiszámolását kéri. Így ezt nem szükséges megtenni.)

$\lambda_1 = -8$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = i$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 10-5i \\ -18+24i \\ 25 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -i$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 10+5i \\ -18-24i \\ 25 \end{pmatrix}$.

(d) $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

A karakterisztikus polinom:

$$\det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 13 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = +2 + \lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Az előzőekkel ellentétben itt most csak a valós sajátérékhez tartozó sajátvektort írom fel. Ugyanis a komplex sajátvektorok meghatározása nem egyszerű feladat.)

$\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$\det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = +8 - 12\lambda + 6\lambda^2 - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(f) $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$\det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 8 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -36 + 15\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karakterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

$\lambda_1 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Döntsük el, hogy az A diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt az P mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $P^{-1}AP$-t; adjuk meg A^{10} mátrixot!
A megadott mátrix akkor lesz diagonalizálható, ha létezik annyi lineárisan független sajátvektora, ahány oszlopa van. Amennyiben diagonalizálható lesz, úgy megkeressük az adott sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat, és ezekből fog állni a hasonlósági mátrix.

(a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -14-\lambda & 12 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét. Ezt 2x2-es esetben elég könnyen megtehetjük:

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} -15344 & 12276 \\ -20460 & 16369 \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -1 + \lambda^2$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét. Ezt 2x2-es esetben elég könnyen megtehetjük:

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.
A sajátvektorok meghatározása:

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét.

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & 512 \\ 0 & 512 & 512 \end{pmatrix}$$

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
A sajátvektorok meghatározása:

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét.

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2045 & -52910 & 54956 \\ -3069 & -167936 & 171006 \\ -3069 & -226985 & 230055 \end{pmatrix}$$

(e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 75\lambda + 125$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5$.

Ennek a mátrixnak minden sajátvektora $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor konstansszorosa, így sajnos nem lesz diagonalizálható. Ugyanis nem tudunk megadni 3 független sajátvektort.

(f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Itt sincs ugyan 3 különböző sajátérték, ugyanakkor a mátrix mégis diagonalizálható lesz, mivel a 0-hoz meg tudunk majd adni két független sajátvektort. A sajátvektorok meghatározása:

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét.

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Legyen a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció az alábbi módon adott:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & & -x_3 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 \end{bmatrix}$$

Határozzunk meg $\mathbb{R}^3$-nak egy olyan bázisát, amelyben T mátrixa diagonális!

A transzformáció mátrixa a természetes bázisban (jelöljük ezt B_1-gyel):

$$T_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Egy B_2 bázisban a mátrix a $T_{B_2} = P^{-1}T_{B_1}P$ képlettel számolható, ahol P a B_1-ből B_2 bázisba való átmenetmátrix. Vagyis egy olyan P mátrixra van szükségünk, amelyre $P^{-1}T_{B_1}P$ diagonális. Előző feladatban láttuk, hogy ehhez T_{B_1} sajátvektorait kell kiszámolnunk. Mivel P oszlopai épp az új bázisvektorok (a természetes bázisban felírva), így a keresett bázis pont egy a T_{B_1} sajátvektoraiból álló bázis.

T_{B_1} sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$, hozzájuk tartozó (független sajátvektorok): $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ekkor a $B_2 = \{s_1, s_2, s_3\}$ bázisban a transzformáció mátrixa

$$T_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Keressük meg azt az ortogonális P mátrixot, amely a szimmetrikus A mátrixot diagonalizálja és írjuk fel a D diagonális mátrixot!
Kiszámoljuk a sajátértékeket, a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, majd lenormáljuk a sajátvektorokat. Ekkor megkapjuk a P ortogonális mátrixot.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\lambda_2 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$
A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -4$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 8$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

(c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$
A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -50, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = -50$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = 25$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$\lambda_3 = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 2$.

A sajátvektorok meghatározása:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Írjuk fel az alábbi kvadratikus formákat $x^T A x$ alakban, ahol A szimmetrikus mátrix!
A fenti kvadratikus alak a következő módon néz ki: az A mátrix főátlójában állnak a négyzetes tagok együtthatói, a többi helyen a megfelelő kétszeres szorzatok fele. Minden esetben csak az A mátrixot tüntetem fel.

(a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

(b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

11. Végezzük el az előző feladat fordítottját az alábbi alakokból kiindulva!
Itt természetesen csupán el kell végezni a mátrixszorzásnak megfelelő műveleteket. És elvégezni a lehetséges összevonásokat

(a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 - 6xy + 5y^2$

(b) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 - 3y^2 + 5z^2$

(c) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2x^2 + 7xy + xz + 12yz + 3z^2$

12. Keressük meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzformálható és írjuk fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével!

Először megkeressük a kvadratikus alakhoz tartozó A szimmetrikus mátrixot, mint a 10. feladatban. Kiszámoljuk ennek sajátértékeit (λ_1, λ_2) és sajátvektorait. A lenormált sajátvektorokból, mint oszlopokból el?állítjuk a P koordináta transzformációt. Ekkor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

transzformáció esetén a kvadratikus alak $\lambda_1 \cdot y_1^2 + \lambda_2 \cdot y_2^2$ alakú lesz.

(a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$
$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, sajátértékek: 3, 1, $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $3y_1^2 + y_2^2$.

(b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$
$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, sajátértékek: 6, 1, $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $6y_1^2 + y_2^2$.

(c) $2x_1x_2$
$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sajátértékek: 1, -1, $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $y_1^2 - y_2^2$.

(d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$
$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, sajátértékek: $1 + \sqrt{17}$, $1 - \sqrt{17}$, $P = \frac{1}{\sqrt{34-8\sqrt{17}}} \begin{bmatrix} \sqrt{17} - 4 & 1 \\ 1 & 4 - \sqrt{17} \end{bmatrix}$ és ezzel a koordináta transzformációval a kvadratikus alak: $(1 + \sqrt{17})y_1^2 + (1 - \sqrt{17})y_2^2$.