Matematika A2

9. feladatsor

1. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix hasonló a $\underline{\underline{B}}$ $n \times n$-es mátrixhoz, ha létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Jelölés: $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$. Bizonyítsa, be, hogy
   (a) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}} \Rightarrow \underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{A}}$;
   (b) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{A}}$;
   (c) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{C}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{C}}$.
2. Mely $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrixokra teljesül, hogy $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{I_n}}$ ($\underline{\underline{I_n}}$ az egységmátrixot jelöli)?
3. Bizonyítsa be, hogy adott mátrix esetén egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok alteret alkotnak!
4. Bizonyítsa be, hogy két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor összege nem sajátvektor!
5. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!
   (a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
   (d) $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
   (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
6. Határozza meg az alábbi márixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!
   (a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
   (c) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$
   (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. Döntsük el, hogy az A diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt az P mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $P^{-1}AP$-t; adjuk meg A^{10} mátrixot!

   (a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (e) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   (f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Legyen a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció az alábbi módon adott:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & & -x_3 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 \end{bmatrix}$$

   Határozzunk meg $\mathbb{R}^3$-nak egy olyan bázisát, amelyben T mátrixsza diagonális!

9. Keressük meg azt az ortogonális P mátrixot, amely a szimmetrikus A mátrixot diagonalizálja és írjuk fel a D diagonális mátrixot!

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. Írjuk fel az alábbi kvadratikus formákat $x^T Ax$ alakban, ahol A szimmetrikus mátrix!

(a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$

(b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

(c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

11. Végezzük el az előző feladat fordítottját az alábbi alakokból kiindulva!

(a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

12. Keressük meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzfomálható és írjuk fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével!

(a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

(b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$

(c) $2x_1x_2$

(d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$