

Matematika A2

8. feladatsor megoldása

1. Tekintsük az \mathbb{R}^n -et és rajta az euklideszi skalár szorzatot ($n = 2, 3, 4$). Határozzuk meg az \mathbf{u} és a \mathbf{v} vektorok által bezárt szög koszinuszát!

A bezárt szög koszinuszát az euklideszi skalárszorzat segítségével az alábbi képlettel kapjuk:

$$\cos \alpha = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

(a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{10}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{20}$$

$$\cos \alpha = \frac{2 - 12}{\sqrt{200}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(b) $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 8)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{73}$$

$$\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{73}}$$

(c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{101}$$

$$\cos \alpha = \frac{-2 + 20 - 18}{\sqrt{3030}} = 0$$

Azaz ez a két vektor merőleges egymásra.

(d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{81} = 9$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{10}$$

$$\cos \alpha = \frac{4 + 0 - 24}{9\sqrt{10}} = -\frac{20}{9\sqrt{10}}$$

(e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{36} = 6$$

$$\cos \alpha = \frac{-3 - 0 - 3 - 0}{6\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{55}$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \alpha = \frac{8 + 0 + 0 + 0}{4\sqrt{55}} = \frac{2}{\sqrt{55}}$$

2. Határozza meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ és $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{d} = (1, 0, 0, 0)$ vektorok között lévő szögeket a szokásos, euklideszi skalár szorzattal.

A feladat megoldása során a fenti képletet használjuk majd.

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$$

$$\|\mathbf{c}\| = \sqrt{2}$$

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{1} = 1$$

$$\cos(a, b) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Tehát az a és b vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{6}$.

$$\cos(a, c) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Tehát az a és c vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{4}$.

$$\cos(a, d) = \frac{1}{2}$$

Tehát az a és d vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{3}$.

$$\cos(b, c) = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Tehát a b és c vektorok által bezárt szög: $\arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

$$\cos(b, d) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tehát a b és d vektorok által bezárt szög: $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

$$\cos(c, d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tehát a c és d vektorok által bezárt szög: $\frac{\pi}{4}$.

3. Legyen V egy skalárszorzos tér. Mutassuk meg, hogy ha \mathbf{u} és \mathbf{v} ortogonális vektorok V -ben úgy, hogy $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, akkor $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$!

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{1 - 2 \cdot 0 + 1} = \sqrt{2}$$

4. Legyen V egy skalárszorzos tér. Igazoljuk a

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

azonosságot V minden \mathbf{u} és \mathbf{v} vektorára!

A feladat megoldása során a skaláris szorzat és a norma közötti kapcsolatot, illetve a skaláris szorzat linearitását kell használni.

5. Tekintsük az \mathbb{R}^3 -at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?

Egy vektorhalmaz akkor ortonormált, ha a benne lévő vektorok páronként merőlegesek egymásra és a hosszuk 1.

(a) $a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $b = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $c = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

A fenti vektorhalmaz nem lesz ortonormált, mert a b és c vektorok nem lesznek merőlegesek egymásra. Ugyanis

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \neq 0$$

Emiatt tehát nem alkothatnak ortonormált vektorrendszert.

(b) $a = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $b = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $c = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

A fenti vektorhalmaz ortonormált. A vektorok páronként merőlegesek és egység-hosszúak.

(c) $a = (1, 0, 0)$, $b = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $c = (0, 0, 1)$

A fenti vektorhalmaz nem ortonormált, ugyanis a b és c vektorok nem merőlegesek egymásra:

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

(d) $a = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $b = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

A fenti vektorhalmaz ortonormált. Ugyanis a két vektor merőleges egymásra és a hosszuk 1.

6. Határozza meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy a $\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, -1, a)$ és $\underline{v}_3 = (1, -1, b, c)$ vektorok ortogonálisak legyenek!

A vektorok akkor ortogonálisak, ha merőlegesek egymásra. Azaz azt kell ellenőriznünk, hogy a megfelelő euklideszi skaláris szorzatok 0-k legyenek.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 1 + 1 - 1 - a = 0, \rightarrow a = -1$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = b + c = 0$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = -b - c = 0$$

A fenti egyenletekből azt látjuk, hogy a b és c paraméterek között a következő kapcsolat áll fenn: $b = -c$. Azaz a feladat megoldása: $a = -1$, míg $b = -c$, ahol b értéke szabadon megválasztható.

7. Határozza meg az \mathbb{R}^3 -ben lévő $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!

A sík egy kétdimenziós altér, így az ortonormált bázis két vektorból áll majd. Emellett annak is teljesülnie kell, hogy a két vektor merőleges egymásra, benne vannak a síkban illetve hosszuk 1.

A következő vektorpár ortonormált bázis: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ és $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. (Ezek megkaphatók $(1, -1, 0)$, $(1, 0, -1)$ bázisból Gram-Schmidt-módszerrel.)

8. Tekintsük az \mathbb{R}^3 -at az euklideszi skalár szorzással. Használjuk a Gram-Schmidt-módszert az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ bázis ortonormált bázissá alakítására!

A Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás során a következő lépéseket kell végrehajtani:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 \rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_3 \rangle \frac{\mathbf{v}_1}{\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle} - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3 \rangle \frac{\mathbf{v}_2}{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle}$$

Ezek még nem lesznek ortonormált vektorok, tehát még le kell majd őket normálni.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 1)$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right)$$

Ezeket a vektorokat még le kell normálnunk. Tehát a végeredmény:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0), \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$$

(b) $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 7, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 4, 1)$

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 7, -2), \mathbf{v}_3 = \left(0, \frac{30}{53}, \frac{105}{53}\right)$$

Ezeket a vektorokat még le kell normálnunk. Tehát a végeredmény:

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{53}}(0, 7, -2), \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{53}}(0, 2, 7)$$

9. Határozzuk meg \mathbf{v} $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ szerinti koordináta vektorát!

(a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 3, 3)$

A koordinátavektor meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert: $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$. Ekkor \mathbf{v} koordinátavektora: (a, b, c) . Az egyenletrendszer egyszerűen megoldható az eredménye: $c = 1$, $b = -2$, $a = 3$.

Tehát \mathbf{v} koordinátavektora: $(3, -2, 1)$.

(b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (7, -8, 9)$ A koordinátavektor meghatározásához meg kell oldanunk a következő egyenletrendszert: $av_1 + bv_2 + cv_3 = v$. Ekkor \mathbf{v} koordinátavektora: (a, b, c) . Az egyenletrendszer egyszerűen megoldható az eredménye: $c = 1$, $b = 0$, $a = -2$.

Tehát \mathbf{v} koordinátavektora: $(-2, 0, 1)$.

10. Tekintsük a $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ és a $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bázisait \mathbb{R}^2 -nek, ahol

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Keressük meg a B' -ből B -be való bázisátmenet mátrixát!

Ehhez fel kell írni B vektorait B' bázisban, azaz meg kell oldani az $\alpha_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1$ és $\alpha_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \beta_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2$ rendszereket és így $P_{B' \rightarrow B} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Keressük meg a B -ből B' -be való bázisátmenet mátrixát!

Mivel B a természetes bázis, ezért ez könnyen felírható:

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Az (a) feladatot megoldhattunk volna úgy is, hogy előbb felírjuk $P_{B \rightarrow B'}$ mátrixot és ekkor $P_{B' \rightarrow B} = P_{B \rightarrow B'}^{-1}$.)

(c) Számítsuk ki a $[\mathbf{w}]_B$ koordinátavektort, ahol $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ és a $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{w}]_B$ képlettel számítsuk ki $[\mathbf{w}]_{B'}$ -t is!

$$[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [\mathbf{w}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'}^{-1}[\mathbf{w}]_B = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

(d) Számításunk ellenőrzésekén számítsuk ki direkt módon is a $[\mathbf{w}]_{B'}$ -t!

Az $\alpha \cdot \mathbf{v}_1 + \beta \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$ rendszer megoldásából is $[\mathbf{w}]_{B'} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -3 \\ -13 \end{bmatrix}$ adódik.

11. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak!

Definíció alapján egy mátrix akkor lesz ortogonális, ha $AA^T = I$

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát ezen A mátrix ortogonális.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$BB^T = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a B mátrix ortogonális.

(c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a C mátrix nem lesz ortogonális, hiszen az előbbi szorzás eredményeképp nem az identitás mátrixot kaptuk meg.

12. Határozza meg az \mathbb{R}^2 természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

A transzformáció mátrixának megadásához egyszerűen azt kell vizsgálnunk, hogy a bázisvektoroknak mi lesz a képe, azaz a bázisvektorok mibe mennek át.

(a) az $y = x$ egyenesre tükrözés (\underline{T}_1);

Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Az $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tehát a keresett transzformációs mátrix: $T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) az $y = -x$ egyenesre tükrözés (\underline{T}_2); Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Az $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tehát a keresett transzformációs mátrix: $T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) az O -ra való tükrözés (\underline{T}_3). Az $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Az $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ báziselem képe: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Tehát a keresett transzformációs mátrix: $T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(3, 2)$ pont képeit!

$$T_1P = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, T_2P = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}, T_3P = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(e) Írja fel a $\underline{T}_2\underline{T}_1$ mátrixot! Magyarázza meg a kapott eredmény és a \underline{T}_3 mátrix közötti kapcsolatot!

Azt kapjuk, hogy $T_2T_1 = T_3$, hiszen a két tükrözést elvégezve pont az O -ra tükrözést kapjuk.

13. Határozza meg az \mathbb{R}^3 természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

(a) az $y = x$ síkra tükrözés;

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) az x, y síkra vetítés;

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) a z tengely körüli 60° -os forgatás.

$$T_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(1, 1, 1)$ pont képeit!

$$T_1P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, T_2P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_3P = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

14. (a) Határozza meg \mathbb{R}^2 -ben a $\frac{\pi}{2}$ -vel való forgatás mátrixát a $B = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ természetes bázisban és a $B' = \left\{ \mathbf{b}'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}'_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bázisban!

$$T_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Határozza meg a bázisátmenet mátrixot!

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Hogyan kaphatjuk meg a B' -ben vett transzformáció mátrixot a B -ben vett transzformáció mátrixból és a bázisátmenet mátrixból?

$$T_{B'} = P_{B \rightarrow B'}^{-1} T_B P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$