Matematika A2

7. gyakorlat

1. Keressük meg a megadott mátrix **(i)** sorainak egy bázisát, **(ii)** oszlopainak egy bázisát, **(iii)** és határozzuk meg a mátrix rangját!

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

2. Keressünk egy olyan részhalmazát az alábbi vektoroknak, amely az öt vektor által kifeszített tér egy bázisát alkotja! Minden vektort írjuk fel a kapott bázis elemienek lineáris kombinációjaként! $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3, 0)$, $\mathbf{v}_4 = (2, -1, 4, -7)$, $\mathbf{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$

3. Keressünk egy csak sorvektorokból álló bázisát a sortérnek, és egy csak oszlopvektorkból álló bázisát az oszloptérnek.

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

4. Az alább megadott információk alapján határozzuk meg, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány paramétere van!

	A mérete	A rangja	$[A\|b]$ rangja
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	3×3	1	1
(d)	5×9	2	2
(e)	5×9	2	3
(f)	4×4	0	0
(g)	6×2	2	2

5. Legyen $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ és $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ a P_2 tér két vektora. Igazoljuk, hogy a $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ képlettel definiált művelet tényleg skaláris szorzat (belső szorzat) a P_2 téren !

6. Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Határozzuk meg, hogy a következők közül melyek skalár szorzatok az $\mathbb{R}^3$-on!

   (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

   (b) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

   (c) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$

   (d) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

7. Igazoljuk, hogy ha $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ euklideszi skalár szorzat $\mathbb{R}^n$-en és A pedig egy $n \times n$-es mátrix, akkor

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

8. A 2π szerint periodikus integrálható függvények terén tekintsük a következő műveltet:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

ahol $\mathbf{f} = f(x)$, és $\mathbf{g} = g(x)$. Igazoljuk, hogy ez a művelet valóban skalár szorzás! Számítsuk ki az $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$ értékét az alábbi függvények esetén!

   (a) $\mathbf{f} = \cos x, \quad \mathbf{g} = \sin x$

   (b) $\mathbf{f} = \cos kx, \quad \mathbf{g} = \sin lx$, ahol k és l egész számok

   (c) $\mathbf{f} = \tan \frac{x}{8}, \quad \mathbf{g} = 1$

9. Az 5. feladatban megadott skaláris szorzattal számítsuk ki $\|\mathbf{p}\|$-t!

   (a) $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$

   (b) $\mathbf{p} = 3 - 4x^2$

10. Legyen $\mathbf{u} = (3, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 7, -3)$, és $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket!

    (a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

    (b) $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

    (c) $\| - 2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{v}\|$

    (d) $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$

11. Írjuk fel az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok közötti euklideszi távolságot!

    (a) $\mathbf{u} = (2, -1)$; $\mathbf{v} = (3, 2)$

    (b) $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$; $\mathbf{v} = (2, 6, 0)$

    (c) $\mathbf{u} = (2, 0, 1, 3)$; $\mathbf{v} = (-1, 4, 6, 6)$

    (d) $\mathbf{u} = (6, 0, 1, 3, 0)$; $\mathbf{v} = (-1, 4, 2, 8, 3)$

12. Igazoljuk az

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

egyenlőséget bármely $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorokra!

13. Határozzuk meg, hogy a megadott vektorok merőlegesek-e egymásra az euklideszi skaláris szorzat szerint!

    (a) $\mathbf{u} = (-1, 2, 4), \quad \mathbf{v} = (2, 3 - 1)$

    (b) $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, -1, -1)$

    (c) $\mathbf{u} = (a, b, c), \quad \mathbf{v} = (0, 0, 0)$

    (d) $\mathbf{u} = (-2, 3, -5, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -2, -9)$

    (e) $\mathbf{u} = (0, -1, 2, 5), \quad \mathbf{v} = (1, -2, 3, 0)$

    (f) $\mathbf{u} = (a, b), \quad \mathbf{v} = (-b, a)$

14. Tekintsük $\mathbb{R}^3$-on az euklideszi skalár szozatot. Milyen k értékek mellett merőleges egymásra $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$?

    (a) $\mathbf{u} = (2, 1, 3), \quad \mathbf{v} = (1, 7, k)$

    (b) $\mathbf{u} = (k, k, 1), \quad \mathbf{v} = (k, 5, 6)$