

Matematika A2

6. gyakorlat megoldása

1. Határozza meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak vektorteret a szokásos műveletekkel:

- (a) \mathbb{R}^3 azon vektorai, ahol a második koordináta 1;
Ezen vektorok nem alkotnak vektorteret, ugyanis nem zártak az összeadásra. Tekintsük a következő két vektort:

$$v_1 = (0, 1, 0) \quad v_2 = (1, 1, 0)$$

$$v_1 + v_2 = (1, 2, 0)$$

Látható, hogy a fenti összegvektor nem lesz eleme a megadott térnek, hiszen a második koordináta nem 1, hanem 2.

- (b) \mathbb{R}^3 azon vektorai, ahol a második koordináta 0;
Ezen vektorok vektorteret alkotnak, hiszen zártak a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

$$v_1 = (a, 0, b) \quad v_2 = (c, 0, d) \quad \text{ahol } a, b, c, d \text{ tetszőleges valós számok}$$

$$v_1 + v_2 = (a + c, 0, b + d)$$

$$\lambda v_1 = (a\lambda, 0, b\lambda)$$

Látható tehát, hogy mind az összeg, mind a szorzatvektor eleme lesz a megadott térnek, az az tényleg vektortér.

- (c) \mathbb{R}^3 azon vektorai, ahol a koordináták összege 0;
Ezen vektorok vektorteret alkotnak, hiszen zártak a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.

$$v_1 = (a, b, c) \quad v_2 = (d, e, f) \quad \text{ahol } a, b, c, d, e, f \text{ tetszőleges valós számok}$$

$$v_1 + v_2 = (a + d, b + e, c + f)$$

$$\lambda v_1 = (a\lambda, b\lambda, c\lambda)$$

Azt kell ellenőriznünk, hogy a kapott vektorokra is teljesül-e, hogy a koordinátaösszeg 0-val egyenlő.

$$a + d + b + e + c + f = (a + b + c) + (d + e + f) = 0 + 0 = 0$$

$$a\lambda + b\lambda + c\lambda = \lambda(a + b + c) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Látható tehát, hogy mind az összeg, mind a szorzatvektor eleme lesz a megadott térnek, az az tényleg vektortér.

- (d) \mathbb{R}^3 azon vektorai, ahol legalább az egyik koordináta 0;
Ezen vektorok nem alkotnak vektorteret, ugyanis nem zártak az összeadásra. Tekintsük a következő két vektort:

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad v_2 = (0, 1, 1)$$

$$v_1 + v_2 = (1, 2, 1)$$

Látható, hogy a fenti összegvektor nem lesz eleme a megadott térnek, hiszen nincsen neki legalább egy 0 koordinátája.

- (e) azon 2×2 -es valós mátrixok, ahol a főátlóban 0-k vannak;
Ezek a mátrixok vektorteret alkotnak, hiszen zártak a skalárral való szorzásra és a mátrixösszeadásra. Ez a fentiekhez hasonlóan látható, ha felírjuk általánosan az ilyen alakú mátrixokat. (Az ok az, hogy a mátrixösszeadást és a skalárral való szorzást is elemenként végezzük.)
- (f) 2×2 -es valós, szimmetrikus mátrixok;
Ezek a mátrixok is vektorteret alkotnak, hiszen zártak lesznek a skalárral való szorzásra és a mátrixösszeadásra. Ez is a fentiekhez hasonlóan látható.
- (g) azon 2×2 -es valós mátrixok, melyekben nincs 0.
Ezek nem alkotnak vektorteret. Tekintsünk ugyanis a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható tehát, hogy a fenti tér nem zárt az összeadásra, hiszen fenti összegmátrix tartalmaz 0-t.

- (h) a harmadfokú valós együtthatós polinomok;
Ezek a polinomok nem alkotnak vektorteret, ugyanis nem lesznek zártak összeadásra. A tér két eleme x^3 és $-x^3$. Ugyanakkor $x^3 - x^3 = 0$ és a 0 nem harmadfokú polinom. Ezek tehát NEM alkotnak vektorteret.
- (i) a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok;
Ezek a polinomok vektorteret alkotnak, hiszen zártak az összeadásra és skalárral való szorzásra is.
- (j) azon legfeljebb harmadfokú polinomok, ahol $f(1) = 2$;
Ezek a polinomok nem alkotnak vektorteret. Ugyanis

$$f_1 = 2 \quad f_2 = x + 1$$

$$f_1 + f_2 = x + 3$$

Látható, hogy az összegvektorra nem teljesül a megadott feltétel, hisz $f_1 + f_2(1) = 4$. Azaz NEM alkotnak ezek a polinomok vektorteret.

- (k) azon legfeljebb harmadfokú polinomok, ahol $f(1) = 0$;
Ezek a polinomok vektorteret alkotnak. Hiszen zártak lesznek az összeadásra és a skalárral való szorzásra is.
- (l) a legfeljebb harmadfokú polinomok között lévő páros polinomok.
Ezek a polinomok vektorteret alkotnak. Hiszen zártak lesznek az összeadásra és a skalárral való szorzásra is.

2. Az előző feladatban ahol vektorteret kapunk határozzuk meg egy bázisát!

(b)-ben bázis: $v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (0, 0, 1)$

(c)-ben bázis: $v_1 = (1, -1, 0) \quad v_2 = (1, 0, -1)$

(e)-ben bázis: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(f)-ben bázis: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(i)-ben bázis: $1, x, x^2, x^3$

(k)-ban bázis: $x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1$

(l)-ben bázis: $1, x^2$

3. Döntse el, hogy az alábbi halmazok \mathbb{R}^3 -ben, lineárisan függetlenek, generátorrendszert alkotnak, bázist alkotnak-e!

(a) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (4, 3, 1)$

Két vektor akkor lehet lineárisan összefüggő, ha egymás konstansszorososa. Ez a két vektor egymásnak nem konstansszorososa, így lineárisan függetlenek. Nem alkotnak generátorrendszert, mivel az egységvektorokat nem tudjuk előállítani a segítségükkel. Így ez a két vektor nem alkot bázist.

(b) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 3, -1), v_3 = (5, -1, -1)$

A lineáris függetlenség meghatározásához ki kell számolnunk a három vektor alkotta 3×3 -as mátrix determinánsát. Ezen determináns értéke -58 , amely nem egyenlő 0 -val. Tehát ezek a vektorok lineárisan függetlenek. Háromdimenziós térben vagyunk, így bármely 3 lineárisan független vektor generátorrendszert és bázist is alkot. (A determinánst a szokott módon határozzuk meg.)

(c) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 3, -1), v_3 = (2, 5, 2)$

lineáris függetlenség meghatározásához ki kell számolnunk a három vektor alkotta 3×3 -as mátrix determinánsát. Ezen determináns értéke 0 . Tehát ezek a vektorok nem lesznek lineárisan függetlenek. Így nem alkotnak sem bázist, sem generátorrendszert.

(d) $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (1, 3, -1), v_3 = (1, 0, 0)$

A lineáris függetlenség meghatározásához ki kell számolnunk a három vektor alkotta 3×3 -as mátrix determinánsát. Ezen determináns értéke -11 , amely nem egyenlő 0 -val. Tehát ezek a vektorok lineárisan függetlenek. Háromdimenziós térben vagyunk, így bármely 3 lineárisan független vektor generátorrendszert és bázist is alkot.

4. (a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v}_1 = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (6, 0, 5, 1)$, és $\mathbf{v}_3 = (4, -7, 1, 3)$ lineárisan függő rendszert alkotnak \mathbb{R}^4 -ben.

Úgy tudjuk belátni a lineáris összefüggőséget, hogy felírjuk ezen három vektor lineáris kombinációját és az együtthatókról belátjuk, hogy nem 0 -k. A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda_1 = 14; \lambda_2 = -4; \lambda_3 = 6$. Azaz ezekkel az együtthatókkal számolva megkapjuk a fenti vektorokból a 0 vektort. (Természetesen nem ezek az egyetlen megfelelő együtthatók. Arányosan változtatva őket több jó megoldást kapunk.)

- (b) Fejezzük ki mindegyik vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként!

Ezt egész egyszerűen megtehetjük, csupán a fent megkapott egyenletet kell mindig átrendeznünk a megfelelő vektorra.

Az eredeti egyenlet:

$$14\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Ebből fogjuk kifejezni a megfelelő vektorokat:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{2}{7}\mathbf{v}_2 - \frac{3}{7}\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{7}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_3$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{2}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{7}{3}\mathbf{v}_1$$

5. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmaz bázist alkot M_{22} -ben!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Akkor alkotnak ezek a mátrixok bázist, ha lineárisan függetlenek. Ezt pedig úgy tudjuk ellenőrizni, hogy csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullmátrixot. Azaz csak akkor kapjuk meg a nullmátrixot, ha a lineáris kombinációjukban minden együttható 0 .

Tehát a következőt kell megoldanunk:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = 0$$

Ez egyenletrendszer alakban:

$$3\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \quad 6\lambda_1 - \lambda_2 - 8\lambda_3 = 0$$

$$3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \quad -6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

Megoldva ezt az egyenletrendszert megkapjuk, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Azaz ez a négy mátrix tényleg bázist alkot.

6. Határozzuk meg az \mathbb{R}^3 alábbi altereinek a bázisait!

(a) A $3x - 2y + 5z = 0$ egyenletű sík

Ez tehát egy sík, ami kétdimenziós altérnek számít, így két egymással nem párhuzamos vektor megadja a bázist. Hiszen két nem párhuzamos vektor már maximális lineáris független rendszert alkot, azaz bázis.

Két ilyen vektor tehát: $(2, 3, 0); (0, 5, 2)$. Ezek benne vannak a síkban, hiszen kielégítik a sík egyenletét, és nem párhuzamosak ez is látható.

(b) Az $x - y = 0$ egyenletű sík

A fentihez hasonlóan ez is egy sík, ami kétdimenziós altérnek számít, így két egymással nem párhuzamos vektor megadja a bázist. Hiszen két nem párhuzamos vektor már maximális lineáris független rendszert alkot, azaz bázis.

Két ilyen vektor tehát: $(1, 1, 0); (1, 1, 1)$. Ezek benne vannak a síkban, hiszen kielégítik a sík egyenletét, és nem párhuzamosak ez is látható.

(c) Az $x = 2t, y = -t, z = 4t$ egyenes

Az egyenes egydimenziós altér, így egyetlen vektor megadja a bázisát. Ugyanis csak egy vektor már maximálisan független rendszer lesz.

A keresett bázis: $(2, -1, 4)$.

(d) Az (a, b, c) alakú vektorok, ahol $b = a + c$

Ez is kétdimenziós altér lesz a koordináták közötti kapcsolat miatt. Tehát itt is 2 egymással nem párhuzamos vektor már maximális lineáris független rendszer lesz, azaz bázis.

Két ilyen vektor: $(1, 0, -1), (1, 2, 1)$. Ezek kielégítik a fenti feltételt és nem párhuzamosak.

7. Keressük meg egy bázisát az \mathbb{R}^4 megadott vektorai által kifeszített alterének.

(a) $(1, 1, -4, -3), (2, 0, 2, -2), (2, -1, 3, 2)$

A bázis megkereséséhez a vektorokat mátrixba tesszük, és Gauss-eliminációt hajtunk végre. Ekkor a nem 0 sorok megadják a kifeszített altér bázisát. A Gauss-elimináció lépéseit nem részletezem, csupán a végeredményt írom le.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a Gauss-elimináció során nem keletkezett csupa 0 sor, így azt mondhatjuk, hogy ez a 3 vektor lineárisan független, azaz ebben az altérben ez a 3 vektor bázist alkot.

(b) $(-1, 1, -2, 0), (3, 3, 6, 0), (9, 0, 0, 3)$

A bázis megkereséséhez a vektorokat mátrixba tesszük, és Gauss-eliminációt hajtunk végre. Ekkor a nem 0 sorok megadják a kifeszített altér bázisát. A Gauss-elimináció lépéseit nem részletezem, csupán a végeredményt írom le.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 3 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a Gauss-elimináció során nem keletkezett csupa 0 sor, így azt mondhatjuk, hogy ez a 3 vektor lineárisan független, azaz ebben az altérben ez a 3 vektor bázist alkot.

- (c) $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(-2, 0, 2, 2)$, $(0, -3, 0, 3)$

A bázis megkereséséhez a vektorokat mátrixba tesszük, és Gauss-eliminációt hajtunk végre. Ekkor a nem 0 sorok megadják a kifeszített altér bázisát. A Gauss-elimináció lépéseit nem részletezem, csupán a végeredményt írom le.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a Gauss-elimináció során nem keletkezett csupa 0 sor, így azt mondhatjuk, hogy ez a 4 vektor lineárisan független, azaz ebben az altérben ez a 4 vektor bázist alkot.

8. Határozzuk meg, hogy a \mathbf{b} vektor benne van-e az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített térben! Ha benne van, akkor fejezzük ki \mathbf{b} -t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként!

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$

A feladatmegoldása során lényegében meg kell oldanunk a következő lineáris egyenletrendszert: $Ax = b$, ahol x koordinátái megadják majd a lineáris kombinációban a keresett együtthatókat. Ehhez a mátrix kibővített alakjával dolgozunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Azaz ebből már megvan a keresett két együttható (ezek egyértelműek): $x_1 = 1, x_2 = -1$. Ezek segítségével tudjuk kifejezni b -t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként: $b = a_1 - a_2$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

A feladatmegoldása során lényegében meg kell oldanunk a következő lineáris egyenletrendszert: $Ax = b$, ahol x koordinátái megadják majd a lineáris kombinációban a keresett együtthatókat. Ehhez a mátrix kibővített alakjával dolgozunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az alakból azt látjuk, hogy az utolsó sorban ellentmondásra jutottunk, azaz ez a b vektor nem lesz benne az A mátrix oszlopvektorai terében. Így nem tudjuk kifejezni lineáris kombinációként.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

A feladatmegoldása során lényegében meg kell oldanunk a következő lineáris egyenletrendszert: $Ax = b$, ahol x koordinátái megadják majd a lineáris kombinációban a keresett együtthatókat. Ehhez a mátrix kibővített alakjával dolgozunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből már meghatározhatóak a keresett együtthatók, amelyek azonban nem egyértelműek a megfelelő arányokat tartva több jó megoldás is létezik. $x_1 = 1, x_2 = -1 + t, x_3 = t$.