

Matematika A2

2. gyakorlat

Hatványsorok

1. Adjuk meg az itt szereplő sorok konvergenciasugarát és konvergenciaintervallumát!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. Mely x -ek esetén konvergens az

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n + \dots$$

végtelen sor? Mi a sor összege? Melyik sort kapjuk tagonkénti deriválással? Mely x -ek esetén konvergens az új sor?

Taylor-sorok

3. Határozzuk meg az $f(x)$ által (a jelzett helyen) generált Taylor-sort!

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 0$

(b) $f(x) = 1/x^2, \quad a = 1$

(c) $f(x) = e^x, \quad a = 2$

(d) $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$

(e) $f(x) = \arctan 2x, \quad a = 0$

4. Adjuk meg a függvények Taylor-sorát az $x = 0$ helyen!

(a) xe^x

(b) $x \cos \pi x$

(c) $\cos^2 x$ (Útmutatás: $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$)

(d) $\frac{1}{(1-x)^2}$

5. Írjuk fel a megadott függvények binomiális sorának első négy tagját!

(a) $(1-x)^{-1/2}$

(b) $(1 + x^3)^{-1/2}$

(c) $(1 - 2x)^3$

6. Sorok segítségével számítsuk ki a határértékeket!

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x}$

7. Sorok segítségével adjunk 10^{-3} pontosságú becslést az alábbi határozott integrálokra!

(a) $\int_0^{0.2} \sin x^2 dx$

(b) $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx$

(c) $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} dx$