

Matematika A2

11. feladatsor megoldása

1. Írja fel az érintősíkot a P_0 pontban!

Tudjuk, hogy a $z = f(x, y)$ függvény érintősíkja a P_0 pontban a következő: $f'_x(P_0)(x - x_0) + f'_y(P_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$. Azaz láthatjuk hogy csupán a parciális deriváltakra lesz szükség a feladat megoldásában.

(a) $z = x^2 + y^2$, $P_0(1, 1, 2)$

Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

$$f'_x = 2x, \quad f'_x(P_0) = 2$$

$$f'_y = 2y, \quad f'_y(P_0) = 2$$

Az érintősík egyenlete: $2(x - 1) + 2(y - 1) - (z - 2) = 0$.

(b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $P_0(0, 0, 2)$

Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

$$f'_x = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f'_x(P_0) = 0$$

$$f'_y = -\frac{y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f'_y(P_0) = 0$$

Az érintősík egyenlete: $0(x - 1) + 0(y - 1) - (z - 2) = 0$.

(c) $z = xy + x + y$, $P_0(1, -1, -1)$

Az adott pont a síkban fekszik, így felírható az érintősík.

$$f'_x = y + 1, \quad f'_x(P_0) = 0$$

$$f'_y = x + 1, \quad f'_y(P_0) = 2$$

Az érintősík egyenlete: $0(x - 1) + 2(y + 1) - (z + 1) = 0$.

2. Határozzuk meg a megadott függvények összes lokális minimumát, maximumát, ezek helyét és a nyeregpontokat is!

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak eltűnjenek az adott pontban. Emellett a létezés elégséges feltétele, hogy az adott pontban a következő determináns értéke pozitív:

$$D = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

Ekkor, ha $f''_{xx} > 0$, akkor lokális minimumról, míg $f''_{xx} < 0$ esetben lokális maximumról beszélünk.

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = 4x + 3y - 5 = 0$$

$$f'_y = 3x + 8y + 2 = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x = 2$, $y = -1$. Ezen pontban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst.

$$f''_{xx} = 4 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 3 \quad f''_{yy} = 8$$

Tehát a fenti determináns értéke a $(2, -1)$ pontban : $D = 32 - 9 = 23 > 0$. Azaz a $(2, -1)$ pont lokális minimum lesz, mivel $f''_{xx} > 0$.

- (b) $f(x, y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$
 Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = 12x - 6x^2 + 6y = 0$$

$$f'_y = 6y + 6x = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 0, y_1 = 0$ és $x_2 = 1, y_2 = -1$. Ezen pontokban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst.

$$f''_{xx} = 12 - 12x \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 6 \quad f''_{yy} = 6$$

A fenti determináns értéke a $(0, 0)$ pontban: $D = 36$. Azaz a $(0, 0)$ pontban a függvénynek lokális minimuma van, hisz $f''_{xx} > 0$.

A fenti determináns értéke az $(1, -1)$ pontban: $D = -36 < 0$. Azaz az $(1, -1)$ pont nyereg-pont.

- (c) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$
 Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = 3x^2 + 6x = 0$$

$$f'_y = 3y^2 - 6y = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_2 = 0, y_2 = 2$; $x_3 = -2, y_3 = 0$ és $x_4 = -2, y_4 = 2$. Ezen pontokban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst.

$$f''_{xx} = 6x + 6 \quad f''_{xy} = f''_{yx} = 0 \quad f''_{yy} = 6y - 6$$

A fenti determináns értéke a $(0, 0)$ pontban: $D = -36 < 0$. Azaz a $(0, 0)$ pont nyereg-pont. A fenti determináns értéke a $(0, 2)$ pontban: $D = 36 > 0$. Azaz a $(0, 2)$ pont lokális minimum lesz, mivel $f''_{xx} > 0$. A fenti determináns értéke a $(-2, 0)$ pontban: $D = 36 > 0$. Azaz a $(-2, 0)$ pont lokális maximum lesz, mivel $f''_{xx} < 0$. A fenti determináns értéke a $(-2, 2)$ pontban: $D = -36 < 0$. Azaz a $(-2, 2)$ pont nyereg-pont.

- (d) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$
 Először ellenőrizzük a szükséges feltétel teljesülését.

$$f'_x = \frac{-2x}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = 0$$

$$f'_y = \frac{-2y}{(x^2 + y^2 - 1)^2} = 0$$

A fenti egyenletrendszer megoldása: $x = 0, y = 0$. Ezen pontban lehet a függvénynek lokális szélsőértéke. Most vizsgáljuk a fenti determinánst. Értéke a $(0, 0)$ pontban: $D = 4 - 0 = 4$. Azaz a $(0, 0)$ pont lokális maximum lesz, mivel $f''_{xx} < 0$.

3. Keressük meg az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény abszolút maximumát és minimumát az első síknegyedbe eső háromszög alakú tartományon, amelyet az $x = 0, y = 0$ és $y + 2x = 2$ egyenesek határolnak! Egy függvénynek abszolút szélsőértéke lehet azon belső pontokban, ahol a parciális deriváltak értéke 0; illetve a tartomány határán.

Először vizsgáljuk a belső pontokat:

$$f'_x = 2x = 0 \quad f'_y = 2y = 0$$

A fentiek alapján a $(0, 0)$ pont számíthatna belső pontnak. De ez határpont, így ennek a függvénynek belső pontban nincs abszolút szélsőértéke.

Most következzenek a határ vizsgálata:

(i) $x = 0$ esetben $f(0, y) = y^2$. Az így keletkezett egyváltozós függvény szélsőértékét vizsgálva azt kapjuk hogy $y = 0$. Azaz a $(0, 0)$ pontban lehet abszolút szélsőérték.

(ii) $y = 0$ esetben $f(x, 0) = x^2$. Az így keletkezett egyváltozós függvény szélsőértékét vizsgálva azt

kapjuk, hogy $x = 0$. Most nem kaptunk újabb potenciális pontot.

(iii) $y = -2x + 2$ esetben $f(x, -2x + 2) = 5x^2 - 8x + 4$. Az így keletkezett egyváltozós függvény szélsőértékét vizsgálva azt kapjuk, hogy $x = 0,8$, így $y = 0,4$. Azaz a $(0,8; 0,4)$ pontban lehet abszolút szélsőérték.

Emellett azt is tudjuk, hogy minden tartományi csúcspontban lehet abszolút szélsőérték, így vizsgálnunk kell még a $(1, 0)$ és $(0, 2)$ pontokat is.

A megkapott pontokat helyettesítsük vissza a függvénybe, hogy megkapjuk a minimumot és maximumot. $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = 4$, $f(1, 0) = 1$, $f(0,8; 0,4) = 1$. Azaz a függvénynek a $(0, 0)$ pontban lesz minimuma, míg a $(0, 2)$ pontban maximuma.

4. Egy lapos körlap alakú tányér alakját $D = (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1$ egyenlet írja le. A tányért melegítjük úgy, hogy bármely (x, y) pontjában a hőmérséklet értéke $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ lesz. Ábrázoljuk a hőmérséklet néhány szintgörbéjét D -ben. Keressük meg a tányér leghidegebb és legmelegebb pontjait!

Ebben a feladatban is a megadott függvény abszolút szélsőértékét kell megkeresnünk. Azaz először vizsgáljuk a lehetséges belső pontokat.

$$f'_x = 2x - 1 = 0 \quad f'_y = 4y = 0$$

A fentiek alapján a $(\frac{1}{2}, 0)$ belső pont egy lehetséges abszolút szélsőérték.

Most következik a határ vizsgálata:

Paraméterezzük be a határt polárkoordináták segítségével.

$$x = \cos \phi, \quad y = \sin \phi$$

Ekkor $f(\phi) = \cos^2 \phi + 2 \sin^2 \phi - \cos \phi$. Az így keletkezett egyváltozós függvénynek keressük a szélsőértékét, ami a következő pontokban lehet: $\phi = -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}; 0; \pi$. ezeket vissza kell helyettesíteni az x és y helyébe, hogy megkapjuk a keresett (x, y) pontpárokat. Ha ezek megvannak, akkor behelyettesítjük a kapott pontokat az eredeti függvénybe. A legnagyobb értéket $\Phi = \pm \frac{2}{3}\pi$ esetén kapjuk, így a legmelegebb pontok $(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, míg a leghidegebb pont a $(\frac{1}{2}, 0)$ belső pont.

5. Keressük meg az $f(x, y) = xy$ és a $g(x, y) = 2x^2 + y^2$ függvények maximumát és minimumát az $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$ alakú félkörön!

Ez a feladat feltételes szélsőérték problémára vezet. Ezt Lagrange-multiplikátor segítségével oldható meg. (Másik megoldási módszer, hogy $y \geq 0$ miatt a feltételből ki tudjuk fejezni y -t: $y = \sqrt{4 - x^2}$, és így a feladat egy egyváltozós függvény szélsőérték keresésére egyszerűsíthet?.)

(i) A megoldáshoz szükségünk van az f és a feltétel függvény (ezt ϕ -vel jelölöm majd) gradiensére.

$$\text{grad} f = (y, x), \quad \text{grad} \phi = (2x, 2y)$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\text{grad} f = \lambda \text{grad} \phi$, illetve $\phi(x, y) = 0$. Az egyenletrendszer megoldásaként 4 pontot kapunk: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. Ezen négy pontból a második és a negyedik nem teljesíti az $y \geq 0$ feltételt. Az első pont feltételes maximum, míg a harmadik feltételes minimum. Mivel az $y \geq 0$ feltételt nem vettük figyelembe a Lagrange-multiplikátornál, ezért a félkör két végpontját $((-2, 0), (2, 0))$ is le kell ellenőrizni, de ezek most nem adnak szélsőértéket.

(ii) A $g(x, y)$ függvény esetében eljárhatunk hasonlóan:

$$\text{grad} g = (4x, 2y), \quad \text{grad} \Phi = (2x, 2y)$$

Az egyenletrendszert megoldva a vizsgálandó pontok: $(0, 2), (0, -2), (2, 0)$ és $(-2, 0)$. Ezek közül a második nem teljesíti az $y \geq 0$ feltételt. Az első pont feltételes maximum, a harmadik és negyedik pont pedig feltételes minimum.

6. Oldjuk meg a következő feladatot!

Ez a feladat is feltételes szélsőérték keresésére vezet, és ezt is Lagrange-multiplikátoros módszerrel oldjuk meg.

- (a) Mennyi a minimuma $f(x, y) = x + y$ -nak, ha $xy = 16$, $y > 0$?
A megoldáshoz szükségünk van az f és a feltétel függvény (ezt ϕ -vel jelölöm majd) gradiensére.

$$\text{grad}f = (1, 1), \quad \text{grad}\phi = (y, x)$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\text{grad}f = \lambda \text{grad}\phi$, illetve $\phi(x, y) = 0$. Az egyenletrendszer megoldásaként 2 pontot kapunk: $(4, 4)$, $(-4, -4)$. A második pont esetén $y > 0$ nem teljesül, az első pont adja a minimumot, aminek értéke 8.

- (b) Mennyi a maximuma $f(x, y) = xy$ -nak, ha $x + y = 16$?
A megoldáshoz szükségünk van az f és a feltétel függvény (ezt ϕ -vel jelölöm majd) gradiensére.

$$\text{grad}f = (y, x), \quad \text{grad}\phi = (1, 1)$$

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk: $\text{grad}f = \lambda \text{grad}\phi$, illetve $\phi(x, y) = 0$. Az egyenletrendszer megoldásaként 1 pontot kapunk: $(8, 8)$. Ez a pont feltételes maximum lesz, amelynek értéke 64.

7. Mekkora a méretei a $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszisbe írható legnagyobb kerületű téglalapnak, ha az oldalai párhuzamosak a koordinát tengelyekkel? Mekkora a területe?

Ha (x, y) a téglalap első síknegyedbe eső csúcsa, akkor a $K(x, y) = 4(x + y)$ függvényt szeretnénk maximalizálni az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ feltétel mellett. Lagrange-multiplikátor módszert használva a megoldás $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Így a kerület $4\sqrt{a^2 + b^2}$, a terület pedig $\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}$.