Matematika A2

10. feladatsor megoldása

1. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

   (a) $z = 19 - x^2 - y^2$
   xz síkban rajzolt $z = 19 - x^2$ parabola megforgatásával kapott forgásparaboloid.

   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
   xz síkban rajzolt $z = x$, $x \geq 0$ félegyenes megforgatásával kapott kúp.

   (c) $x^2 - y^2 = z$
   Hiperbolikus paraboloid vagy nyeregfelület.

   (d) $x^2 + 4z^2 = 16$
   Az xz síkban rajzolt $x^2 + 4z^2 = 16$ ellipszis y tengellyel párhuzamos eltolásával kapott felület.

   (e) $z^2 - y^2 = 1$
   Az yz síkban rajzolt $z^2 - y^2 = 1$ hiperbola x tengellyel párhuzamos eltolásával kapott felület.

   (f) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$
   Ellipszoid, aminek x tengely mentén az átmérője 2, y és z tengely mentén pedig 6.

   (g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$
   Rögzített $y = k$-ra ($k \in \mathbb{R}$) a $4x^2 + 9z^2 = 9k^2$ ellipszis pontjai.

   (h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
   Rögzített $z = k$-ra ($|k| \geq 1$) a $k^2 - 1 = x^2 + y^2$ kör pontjai.

   (i) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$
   Rögzített $x = k$-ra ($|x| \geq 2$) a $\frac{k^2}{4} - 1 = y^2 + \frac{z^2}{4}$ ellipszis pontjai.

   (j) $y^2 - z^2 = 4$
   Az yz síkban rajzolt $y^2 - z^2 = 4$ hiperbola x tengellyel párhuzamos eltolásával kapott felület.

2. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!

   (a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$
   A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $y - x \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: az $y = x$ egyenes és az efölötti terület. Ez zárt, nem korlátos.
   Értékkészlete: nemnegatív valós számok.
   Szintvonalai: $\sqrt{y - x} = c$, azaz $y = x + c^2$. Azaz a szintvonalai egyenesek, amik az y tengelyt a c^2 pontban metszik.

   (b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
   A függvény értelmezési tartománya azon (x, y) pontpárokból áll, amelyekre $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: az origó középpontú három sugarú körlap pontjai. Ez zárt, korlátos.
   Értékkészlete: $[0, 3]$.
   Szintvonalai az $x^2 + y^2 = 9 - c^2$ körök ($c \in [0, 3]$).

(c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
A függvény értelmezési tartománya azon (x,y) pontpárokból áll, amelyekre $x^2+y^2>0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. Ez nyílt, nem korlátos.
Értékkészlete: $\mathbb{R}$.
Szintvonalai $x^2+y^2=e^c$ körök.

3. Határozzuk meg a határértékeket!

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

A határérték kiszámításakor felhasználtuk, hogy a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy|-1}$
A függvény a megadott pontban folytonos, így a határérték egyszerű behelyettesítéssel számolható. A fenti határérték: $\cos 0 = 1$.

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \sqrt{x}+\sqrt{y}+2 = 2$

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

$$\lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{2x-y-4}{(2x-y-4)\cdot(\sqrt{2x-y}+2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{1}{\sqrt{2x-y}+2} = \frac{1}{4}$$

A határérték kiszámoláskor gyöktelenítettük a számlálót, így már ki tudtuk számolni a határértéket.

4. Az (x,y)-sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

(a) $f(x,y) = \sin(x+y)$
A megadott függvény folytonos függvények összetétele, nincs olyan tartomány, ahol nem értelmezett. Azaz ez a függvény a teljes valós síkon folytonos.
Folytonossági pontok: $\mathbb{R}^2$.

(b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ A megadott függvény folytonos függvények összetétele, a teljes valós síkon értelmezett, kivéve a $(0,0)$ pontot. Azaz ezen függvény folytonossági pontjai: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x,y)\to(0,0)$ esetén!

(a) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$
Közelítsünk a megadott pontba $y = mx^2$ parabolák mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{1}{1+m^2}$$

Azaz látható, hogy különböző m értékekre különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

(b) $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$
Közelítsünk a megadott pontba $y = mx$ különböző meredekségű egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{|mx^2|} = \frac{m}{|m|}$$

Azaz látható, hogy pozitív m értékekre a határérték $+1$, negatív m esetén viszont -1. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

(c) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ Közelítsünk a megadott pontba $y = mx$ különböző meredekségű egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \frac{1-m}{1+m}$$

Azaz látható, hogy különböző m értékekre különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

6. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

(a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

$$f'_x = 2x - y$$
$$f'_y = -x + 2y$$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(c) $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

$$f'_x = y\ln y e^{xy}$$
$$f'_y = \frac{e^{xy}}{y} + x\ln y e^{xy}$$

(d) $f(x,y) = \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

$$f'_x = \frac{1}{x\ln y}$$
$$f'_y = -\frac{\ln x}{y\ln^2 y}$$

7. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

(a) $f(x,y) = x^2y + \cos y + y\sin x$

$$f'_x = 2xy + y\cos x$$
$$f'_y = x^2 - \sin y + \sin x$$
$$f''_{xx} = 2y - y\sin x$$
$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x + \cos x$$
$$f''_{yy} = -\cos y$$

(b) $f(x,y) = \ln(x+y)$

$$f'_x = f'_y = \frac{1}{x+y}$$
$$f''_{xx} = f''_{xy} = f''_{yx} = f''_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

8. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben f_{xy}-t: először x-szerint vagy először y-szerint?

(a) $f(x,y) = x\sin y + e^y$
Először x szerint kell deriválnunk, ugyanis ekkor csak az első tag marad meg, amit könnyű utána y szerint lederiválni.

(b) $f(x,y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$
Először y szerint kell deriválni, ugyanis ekkor csak a második tag marad. És azt utána könnyű x szerint deriválni.

(c) $f(x,y) = x \ln xy$ Először y szerint deriválunk, majd x szerint.

9. Igaz-e, hogy az $f(x,y)$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Laplace-egyenletnek?

(a) $f(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$

$$\begin{aligned} f'_x &= -2e^{-2y} \sin 2x \\ f''_{xx} &= -4e^{-2y} \cos 2x \\ f'_y &= -2e^{-2y} \cos 2x \\ f''_{yy} &= 4e^{-2y} \cos 2x \end{aligned}$$

Látható, hogy ezek alapján tényleg teljesül a fenti állítás. Azaz

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon.

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f''_{xx} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\ f'_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f''_{yy} &= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Kisebb számolás után látható, hogy

$$f''_{xx} + f''_{yy} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

azaz itt nem teljesül a fenti egyenlet.

10. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

(a) $f(x,y) = y - x$, $P_0(2,1)$

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (-1, 1)$$

Azaz ezen függvény gradiense minden pontban: $(-1,1)$

(b) $f(x,y) = y - x^2$, $P_0(-1,0)$

$$\mathrm{grad} f(x,y) = (f'_x, f'_y) = (-2x, 1)$$

Azaz ezen függvény gradiense a megadott P_0 pontban: $(2,1)$.

11. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a P_0 pontban, $\mathbf{A}$ irányában!
A függvény iránymenti deriváltját a következő módon számoljuk: $\langle \text{grad} f, \mathbf{v} \rangle$, ahol $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{A}}{||\mathbf{A}||}$, azaz egy $\mathbf{A}$-val párhuzamos lenormált vektor.

   (a) $f(x, y) = 2xy - 3y^2$, $P_0(2, 1)$, $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

   $$\text{grad} f(x, y) = (2y, 2x - 6y), \quad \text{grad} f(P_0) = (2, -2), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{5}(4, 3)$$

   Azaz az iránymenti derivált értéke: $\frac{2}{5}$.

   (b) $f(x, y, z) = xy + e^{x-y}$, $P_0(1, 1)$, $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

   $$\text{grad} f(x, y) = (y + e^{x-y}, x - e^{x-y}), \quad \text{grad} f(P_0) = (2, 0), \quad \mathbf{v} = \frac{1}{13}(12, -5)$$

   Azaz az iránymenti derivált értéke: $\frac{24}{13}$.

12. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott P_0 pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

   (a) $f(x, y) = x^2 - y^2$, $P_0(1, 1)$
   Egy függvény egy adott pontban a gradiensének irányában nő leggyorsabban és azzal ellentétes irányban csökken a leggyorsabban. Most $\text{grad} f(x, y) = (2x, 2y)$, azaz $\text{grad} f(P_0) = (2, 2)$. Ezt lenormálva kapjuk a leggyorsabb növekedés irányát: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, a leggyorsabb csökkenésé pedig: $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

   (b) $f(x, y) = x + y + xy$, $P_0(0, 0)$
   Most $\text{grad} f(x, y) = (1+y, 1+x)$, azaz $\text{grad} f(P_0) = (1, 1)$. Ezt lenormálva kapjuk a leggyorsabb növekedés irányát: $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$, a leggyorsabb csökkenésé pedig: $-\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.