

# Matematika A2

## 10. feladatsor

1. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

(a)  $z = 19 - x^2 - y^2$

(b)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c)  $x^2 - y^2 = z$

(d)  $x^2 + 4z^2 = 16$

(e)  $z^2 - y^2 = 1$

(f)  $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

(g)  $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

(h)  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

(i)  $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$

(j)  $y^2 - z^2 = 4$

2. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!

(a)  $f(x, y) = \sqrt{y - x}$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

(c)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

3. Határozzuk meg a határértékeket!

(a)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0); x \neq y} \frac{x - y + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0); 2x - y \neq 4} \frac{\sqrt{2x - y} - 2}{2x - y - 4}$

4. Az  $(x, y)$ -sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

(a)  $f(x, y) = \sin(x + y)$

(b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

5. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  esetén!

(a)  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^4 + y^2}$

(b)  $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$

(c)  $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

6. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

(a)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(c)  $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

(d)  $f(x, y) = \log_y x$

7. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

(a)  $f(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x$

(b)  $f(x, y) = \ln(x + y)$

8. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben  $f_{xy}$ -t: először  $x$ -szerint vagy először  $y$ -szerint?

(a)  $f(x, y) = x \sin y + e^y$

(b)  $f(x, y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$

(c)  $f(x, y) = x \ln xy$

9. Igaz-e, hogy az  $f(x, y)$  függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-egyenletnek?

(a)  $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  a  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tartományon.

10. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

(a)  $f(x, y) = y - x$ ,  $P_0(2, 1)$

(b)  $f(x, y) = y - x^2$ ,  $P_0(-1, 0)$

11. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a  $P_0$  pontban,  $\mathbf{A}$  irányában!

(a)  $f(x, y) = 2xy - 3y^2$ ,  $P_0(2, 1)$ ,  $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

(b)  $f(x, y, z) = xy + e^{x-y}$ ,  $P_0(1, 1)$ ,  $\mathbf{A} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

12. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott  $P_0$  pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

(a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $P_0(1, 1)$

(b)  $f(x, y) = x + y + xy$ ,  $P_0(0, 0)$