Matematika A2

9. feladatsor megoldása

1. Az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix hasonló a $\underline{\underline{B}}$ $n \times n$-es mátrixhoz, ha létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Jelölés: $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$. Bizonyítsa, be, hogy

   (a) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}} \Rightarrow \underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{A}}$
   A bizonyítás a definíció alapján történik. $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$, azaz létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Ezt a kifejezést átalakíthatjuk. Jobbról szorzunk a $\underline{\underline{P^{-1}}}$ mátrixszal, míg balról szorzunk a $\underline{\underline{P}}$ mátrixszal. Így a következőt kapjuk:

   $$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{PAP^{-1}}} = \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\left(P^{-1}\right)}^{-1}AP^{-1}}$$

   Azaz ebben az esetben a $\underline{\underline{P^{-1}}}$ lesz az a bizonyos invertálható mátrix, ami létezik.

   (b) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{A}}$
   Keresnünk kell egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrixot,amire teljesül a definíció. Ezen hasonlóság belátásához a $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$ mátrix lesz a megfelelő. Így ezzel teljesülni fog a definíció ésa fenti tulajdonság.

   (c) $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{C}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{C}}$ A bizonyítás itt is a definíció segítségével történik. $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{B}}$, azaz létezik egy $\underline{\underline{P}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{P^{-1}AP}}$. Emellett $\underline{\underline{B}} \sim \underline{\underline{C}}$, azaz létezik egy $\underline{\underline{Q}}$ invertálható mátrix, hogy $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{Q^{-1}BQ}}$. Ezt a második kifejezést alakítsuk át egy kicsit. Jobbról szorzunk a $\underline{\underline{Q^{-1}}}$ mátrixszal, míg balról szorzunk a $\underline{\underline{Q}}$ mátrixszal. Így a következőt kapjuk: $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{QCQ^{-1}}}$. Helyettesítsük be ez utóbb kapott kifejezést az elsőbe. Így:

   $$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{PQCQ^{-1}P^{-1}}} = \underline{\underline{(PQ)C(PQ)^{-1}}}$$

2. Mely $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrixokra teljesül, hogy $\underline{\underline{A}} \sim \underline{\underline{I_n}}$ ($\underline{\underline{I_n}}$ az egységmátrixot jelöli).

3. Bizonyítsa be, hogy adott mátrix esetén egy sajátértékhez tertozó sajátvektorok alteret alkotnak!

4. Bizonyítsa be, hogy két különböző sajátértékhez tartozó sajátvektor összege nem sajátvektor!

5. Határozza meg az alábbi mátrixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!
   A feladat részletes megoldását csak az első esetben részletezem. A megoldás módszere a további részfeladatokban is ugyanaz lenne, de ott csak a végeredményt írom le.

   (a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$
   A mátrix sajátértékének kiszámításához először is meg kell határoznunk a karakterisztikus polinomot. Azaz

   $$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)$$

   A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. Azaz ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = -1$.

A sajátvektorok meghatározása a következőek alapján történik: $(\underline{\underline{A}} - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$
$\lambda_1 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $4v_1 = 0$, azaz $v_1 = 0$, v_2 értéke pedig tetszőleges.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $8v_1 = 4v_2$, azaz $2v_1 = v_2$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -9 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(-2-\lambda) + 36 = \ldots = (\lambda - 4)^2$$

A mátrixnak tehát egy sajátértéke van, amely kétszeres. A sajátérték: $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$.
A sajátvektorok meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani, és ennek két egymástól különböző megoldását megkeresni.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

A karakterisztikus polinom:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. Azaz ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$; $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$.

$\lambda_1 = 2\sqrt{3}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = -2\sqrt{3}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

A karakterisztikus polinom:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -7 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) + 7 = \ldots = \lambda^2 + 3,$$

tehát nincs valós sajátérték.

(e) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

A mátrixnak tehát egy sajátértéke van, amely kétszeres. A sajátérték: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
A sajátvektorok meghatározása estén azt tapsztaljuk hogy v_1, v_2 egyaránt szabadon megválasztható ,így csak két független megoldást kell keresnünk.
Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(f) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

A mátrixnak tehát egy sajátértéke van, amely kétszeres. A sajátérték: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
A sajátvektorok meghatározása esetén két független megoldást kell keresnünk.
Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Határozza meg az alábbi márixok (valós) sajátértékeit, sajátvektorait!
Itt is az előző feladathoz hasonlóan járok el. Azaz a feladat megoldását csak az első esetben részletezem. A megoldás módszere a további részfeladatokban is ugyanaz lenne, de ott csak a végeredményt írom le.

(a) $\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
A mátrix sajátértékének kiszámításához először is meg kell hataároznunk a karakterisztikus polinomot. Azaz

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -6 + 11\lambda - 6\lambda^2 + \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. A gyököket ilyen esetben próbálgatással (1,2,-1,-2 gyökök-e)vagy azonos átalakítással célszerű megkeresni. Ezen mátrix esetében a sajátértékek: $\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
A sajátvektorok meghatározása a következőek alapján történik: $(\underline{\underline{A}} - \lambda I)\underline{v} = \underline{0}$

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $3v_1 + v_3 = 0, -2v_1 = 0$, azaz $v_1 = 0$, $v_3 = 0$ v_2 értéke pedig tetszőleges.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $2v_1 + v_3 = 0, -2v_1 - v_2 = 0, -2v_1 - v_3 = 0$, azaz $v_3 = -2v_1$, $v_2 = -2v_1$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ezt a fenti egyenlerendszert kell megoldani. Azt kapjuk megoldásként, hogy $v_1 + v_3 = 0, -2v_1 - 2v_2 = 0, -2v_1 - 2v_3$, azaz $v_1 = -v_3$, $v_1 = v_2$.

Tehát ezen sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -5 \\ \frac{1}{5} & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -2\lambda + \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \sqrt{2}\lambda_3 = -\sqrt{2}$.

$\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = \sqrt{2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{2}-3} \\ \frac{3+\sqrt{2}}{7(\sqrt{2}+1)} \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = -\sqrt{2}$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} \frac{-5}{-\sqrt{2}-3} \\ \frac{3-\sqrt{2}}{7(-\sqrt{2}+1)} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ -6 & -2-\lambda & 0 \\ 19 & 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 8 + \lambda + 8\lambda^2 + \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. A valós sajátérték: $\lambda_1 = -8$.
(Itt is vannak komplex sajátértékek. FElírom a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, de a feladat csak a valós sajátértékek és sajátvektorok kiszámolását kéri. Így ezt nem szükséges megtenni.)

$\lambda_1 = -8$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(d) $\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ -4 & 13 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -2 - \lambda - \lambda^2 + \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. A valós sajátérték: $\lambda_1 = 2$.

$\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ -7 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -8 + 12\lambda - 6\lambda^2 + \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

$\lambda = 2$ sajátértékhez több független sajátvektort kell keresnünk. Mi most két független sajátvektort találunk majd.
Ez: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(f) $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ A karakterisztikus polinom:

$$det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 8 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = 36 - 15\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei a karkaterisztikus polinom gyökei. A sajátértékek: $\lambda_1 = -4; \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

$\lambda_1 = -4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Döntsük el, hogy az A diagonalizálható-e! Ha igen, akkor keressük meg azt az P mátrixot, amely diagonalizálja az A-t, majd határozzuk meg a $P^{-1}AP$-t; adjuk meg A^{10} mátrixot!
A megadott mátrix akkor lesz diagonalizálható, ha létezik neki 2 vagy 3 különböző sajátértéke. amennyiben diagonalizálható lesz, úgy megkeressük az adott sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat, és ebből fog állni a hasonlósági mátrix. Mivel a hasonlósági mátrixnak szükségünk van az inverzére is, azért célszerű a megkapott sajátvektorokat normálni, mivel egy ortogonális lesz P és egyszerű lesz invertálni.

   (a) $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$
   Karakterisztikus polinom:
   $$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -14-\lambda & 12 \\ -20 & 17-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$
   A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
   A sajátvektorok meghatározása:
   $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
   $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:
   $$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$
   Ennek kell kiszámolnunk az inverzét. Ezt 2x2-es esetben elég könnyen megtehetjük:
   $$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$
   Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.
   $$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   $$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} -15344 & 12276 \\ -20460 & 16369 \end{pmatrix}$$

   (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$
   Karakterisztikus polinom:
   $$det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -1 + \lambda^2$$
   A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.
   A sajátvektorok meghatározása:
   $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   $\lambda_2 = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:
   $$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét. Ezt 2x2-es esetben elég könnyen megtehetjük:

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Karakterisztikus polinom:

$$det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 0$.

A sajátvektorok meghatározása:

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét.

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 512 & 512 \\ 0 & 512 & 512 \end{pmatrix}$$

(d) $D = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$\lambda_3 = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét.

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2045 & -52910 & 54956 \\ -3069 & -167936 & 171006 \\ -3069 & -226985 & 230055 \end{pmatrix}$$

(e) $E = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$det(E - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 75\lambda - 125$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 5$.
Mivel ennek a mátrixnak nincsenek különböző sajátértékei, így sajnos nem lesz diagonalizálható. Ugyanis nem tudunk megadni 3 független sajátvektort.

(f) $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Karakterisztikus polinom:

$$det(F - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda^2 - \lambda^3$$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Itt sincs ugyan 3 különböző sajátérték, ugyanakkor a mátrix mégis diagonalizálható lesz, mivel a 0-hoz meg tudunk majd adni ké fügetlen sajárvektort. A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét.

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Legyen a $T : R^3 \rightarrow R^3$ lineáris transzformáció az alábbi módon adott:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & & -x_3 \\ -x_1 & +x_2 & +2x_3 \end{bmatrix}$$

Határozzunk meg R^3-nak egy olyan bázisát, amelyben T mátrixsza diagonális!

9. Keressük meg azt az ortogonális P mátrixot, amely a szimmetrikus A mátrixot diagonalizálja és írjuk fel a D diagonális mátrixot!
A fenti feladatban leírtakat kell itt is követni. Azaz kiszámolni a sajátértékeket, a hozzájuk tartozó sajátvektorokat, majd lenormálni a sajátvektorokat. Ekkor megkapjuk a P ortogonális mátrixot.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 8$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:
$\lambda_2 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor:
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} =$$

$$D = P^{-1}AP =$$

(b) $B = \begin{bmatrix} 5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Ennek kell kiszámolnunk az inverzét. Ezt 2x2-es esetben elég könnyen megtehetjük:

$$\underline{\underline{P^{-1}}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Most még a $P^{-1}AP$ szorzat értékének meghatározása van hátra. Ha jól dolgoztunk, akkor egy diagonális mátrixot kapunk, aminek főátlójában a sajátértékek állnak.

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{pmatrix} -15344 & 12276 \\ -20460 & 16369 \end{pmatrix}$$

(c) $C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{bmatrix}$

A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -50, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = -3$.
A sajátvektorok meghatározása:
$\lambda_1 = -50$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$\lambda_2 = 25$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
$\lambda_3 = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -50 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Karakterisztikus polinom: A mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4, \lambda_4 = 2$.

A sajátvektorok meghatározása:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektor: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

A fent leírtaknak megfelelően tehát a P hasonlósági mátrix a következő:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10. Írjuk fel az alábbi kvadratikus formákat $x^T Ax$ alakban, ahol A szimmetrikus mátrix!
A fenti kvadratikus alak a következő módon názni ki: az A mátrix főátlójában állnak a négyzetes tagok együtthatói, a többi helen a megfelelő kétszeres szorzatok fele. Minden esetben csak az A mátrixot tüntetem fel.

(a) $9x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -4 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

(b) $x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 5x_1x_2 + 9x_1x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{9}{2} & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

11. Végezzük el az előző feladat fordítottját az alábbi alakokból kiindulva!
Itt természetesen csupán el kell végezni a mátrixszorzásnak megfelelő műveleteket. És elvégezni a lehetséges összevonásokat

(a) $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2x^2 - 6xy + 25y^2$

(b) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 - 3y^2 + 5z^2$

(c) $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2x^2 + 7xy + xz + 12yz + 3z^2$

12. Keressük meg azt az ortogonális koordináta transzformációt, amellyel az alábbi kvadratikus alak négyzetek összegévé transzfomálható és írjuk fel a kvadratikus alakot az új változók segítségével!

(a) $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2$

(b) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2$

(c) $2x_1x_2$

(d) $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2$