Matematika A2

8. feladatsor

1. Tekintsük az R^n-et és rajta az euklideszi skalár szorzatot ($n = 2, 3, 4$). Határozzuk meg az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}$ vektorok által bezárt szög koszinuszát!

   (a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$
   (b) $\mathbf{u} = (-1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 8)$
   (c) $\mathbf{u} = (-1, 5, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 4, -9)$
   (d) $\mathbf{u} = (4, 1, 8)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -3)$
   (e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (-3, -3, -3, -3)$
   (f) $\mathbf{u} = (2, 1, 7, -1)$, $\mathbf{v} = (4, 0, 0, 0)$

2. Határozza meg az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (1, 1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (1, 1, 0, 0)$, $\mathbf{d} = (1, 0, 0, 0)$ vektorok között lévő szögeket a szokászos, euklideszi skalár szorzattal.

3. Legyen V egy skalárszorzatos tér. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ ortogonális vektorok V-ben úgy, hogy $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$, akkor $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$!

4. Legyen V egy skalárszorzatos tér. Igazoljuk a

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

   azonosságot V minden $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorára!

5. Tekintsük az R^3-at az euklideszi skalár szorzással. Az alábbiak közül melyek ortonormált vektorhalmazok?

   (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
   (b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$
   (c) $(1, 0, 0)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0, 0, 1)$
   (d) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

6. Határozza meg az a, b, c valós számokat úgy, hogy a $\underline{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, -1, a)$ és $\underline{v}_3 = (1, -1, b, c)$ vektorok ortogonálisak legyenek!

7. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$-ben lévő $x + y + z = 0$ sík egy ortonormált bázisát!

8. Tekintsük az R^3-at az euklideszi skalár szorzással. Használjuk a Gram-Schmidt-módszert az $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ bázis ortonormált bázissá alakítására!

   (a) $\mathbf{u_1} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u_2} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{u_3} = (1, 2, 1)$
   (b) $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u_2} = (3, 7, -2)$, $\mathbf{u_3} = (0, 4, 1)$

9. Határozzuk meg $\mathbf{v}$ $S = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ szerinti koordináta vektorát és a koordináta mátrixát !

   (a) $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$; $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v_2} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{v_3} = (3, 3, 3)$
   (b) $\mathbf{v} = (5, -12, 3)$; $\mathbf{v_1} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v_2} = (-4, 5, 6)$, $\mathbf{v_3} = (7, -8, 9)$

10. Tekinsük a $B = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ és a $B' = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ R^2 bázisait, ahol

$$\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) Keressük meg a B'-ből B-be való bázisátmenet mátrixát!

(b) Keressük meg a B-ből B'-be való bázisátmenet mátrixát!

(c) Számítsuk ki a $[\mathbf{w}]_B$ koordináta mátrixot, ahol $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$ és a $[\mathbf{w}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{w}]_B$ képlettel számítsuk ki $[\mathbf{w}]_{B'}$-t is!

(d) Számításunk ellenőrzésekén számítsuk ki direkt módon is a $[\mathbf{w}]_{B'}$-t!

11. Határozzuk meg, hogy az alábbi mátrixok közül melyek ortogonálisak!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

12. Határozza meg az $\mathbb{R}^2$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

(a) az $y = x$ egyenesre tükrözés ($\underline{\underline{T}}_1$);

(b) az $y = -x$ egyenesre tükrözés ($\underline{\underline{T}}_2$);

(c) az O-ra való tükrözés ($\underline{\underline{T}}_3$).

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(3, 2)$ pont képeit!

(e) Írja fel a $\underline{\underline{T}}_2\underline{\underline{T}}_1$ mátrixot! Magyarázza meg a kapott eredmény és a $\underline{\underline{T}}_3$ mátrix közötti kapcsolatot!

13. Határozza meg az $\mathbb{R}^3$ természetes bázisában a következő transzformációk mátrixát:

(a) az $y = x$ síkra tükrözés;

(b) az x, y síkra vetítés;

(c) a z tengely körüli 60°-os forgatás.

(d) Határozza meg a mátrixok segítségével a $P(1, 1, 1)$ pont képeit!

14. (a) Határozza meg $\mathbb{R}^2$-ben a $\frac{\pi}{2}$-vel való forgatás mátrixát a $B = \{\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ természetes bázisban és a $B' = \{\mathbf{b'_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b'_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ bázisban!

(b) Határozza meg a bázisátmenet mátrixot!

(c) Hogyan kaphatjuk meg a B'-ben vett transzformáció mátrixot a B-ben vett transzformációmátrixból és a bázisátmenet mátrixból?