Matematika A2

6. gyakorlat megoldása

1. Határozza meg, hogy az alábbi halmazok közül melyek alkotnak vektorteret a szokásos műveletekkel:

   (a) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a második koordináta 1;
   Ezen vektorok nem alkotnak vektorteret, ugyanis nem zártak az összeadásra. Tekintsük a következő két vektort:
   $$v_1 = (0,1,0) \quad v_2 = (1,1,0)$$
   $$v_1 + v_2 = (1,2,0)$$
   Látható, hogy a fenti összegvektor nem lesz eleme a megadott térnek, hiszen a második koordináta nem 1, hanem 2.

   (b) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a második koordináta 0;
   Ezen vektorok vektorteret alkotnak, hiszen zártak a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.
   $$v_1 = (a,0,b) \quad v_2 = (c,0,d) \quad \text{ahol a,b,c,d tetszőleges valós számok}$$
   $$v_1 + v_2 = (a+c, 0, b+d)$$
   $$\lambda v_1 = (a\lambda, 0, b\lambda)$$
   Látható tehát, hogy mind az összeg, mind a szorzatvektor eleme lesz a megadott térnek, az az tényleg vektortér.

   (c) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol a koordináták összege 0;
   Ezen vektorok vektorteret alkotnak, hiszen zártak a vektorösszeadásra és a skalárral való szorzásra.
   $$v_1 = (a,b,c) \quad v_2 = (d,e,f) \quad \text{ahol a,b,c,d,e,f tetszőleges valós számok}$$
   $$v_1 + v_2 = (a+d, b+e, c+f)$$
   $$\lambda v_1 = (a\lambda, b\lambda, c\lambda)$$
   Azt kell ellenőriznünk, hogy a kapott vektorokra is teljesül-e, hogy a koordinátaösssszeg 0-val egyenlő.
   $$a+d+b+e+c+f = (a+b+c)+(d+e+f) = 0+0 = 0$$
   $$a\lambda + b\lambda + c\lambda = \lambda(a+b+c) = \lambda * 0 = 0$$
   Látható tehát, hogy mind az összeg, mind a szorzatvektor eleme lesz a megadott térnek, az az tényleg vektortér.

   (d) $\mathbb{R}^3$ azon vektorai, ahol legalább az egyik koordináta 0;
   Ezen vektorok nem alkotnak vektorteret, ugyanis nem zártak az összeadásra. Tekintsük a következő két vektort:
   $$v_1 = (1,1,0) \quad v_2 = (0,1,1)$$
   $$v_1 + v_2 = (1,2,1)$$
   Látható, hogy a fenti összegvektor nem lesz eleme a megadott térnek, hiszen nincsen neki legalább egy 0 koordinátája.

(e) azon 2×2-es valós mátrixok, ahol a főátlóban 0-k vannak;
Ezek a mátrixok vektorteret alkotnak, hiszen zártak a skalárral való szorzásra és a mátrixösszeadásra. Ez a fentiekhez hasonlóan látható, ha felírjuk általánosan az ilyen alakú mátrixokat. (Az ok az, hogy a mátrixösszeadást és a skalárral való szorzást is elemenként végezzük.)

(f) 2×2-es valós, szimmetrikus mátrixok;
Ezek a mátrixok is vektorteret alkotnak, hiszen zártak lesznek a skalárral való szorzásra és a mátrixösszeadásra. Ez is a fentiekhez hasonlóan látható.

(g) azon 2×2-es valós mátrixok, melyekben nincs 0.
Ezek nem alkotnak vektorteret. Tekintsünk ugyanis a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Látható tehát, hogy a fenti tér nem zárt az összeadásra, hiszen fenti összegmátrix tartalmaz 0-t.

(h) a harmadfokú valós együtthatós polinomok;
Ezek a polinomok nem alkotnak vektorteret, ugyanis nem lesznek zártak összeadásra.A tér két eleme x^3 és $-x^3$. Ugyanakkor $x^3 - x^3 = 0$ és a 0 nem harmadfokú polinom.
Ezek tehát NEM alkotnak vektorteret.

(i) a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok;
Ezek a polinomok vekorteret alkotnak, hiszen zártak az összeadásra és skaláral való szorzásra is.

(j) azon legfeljebb harmadfokú polinomok, ahol $f(1) = 2$;
Ezek a polinomok nem alkotnak vektorteret. Ugyanis

$$f_1 = 2 \quad f_2 = x + 1$$

$$f_1 + f_2 = x + 3$$

Látható, hogy az összegvektorra nem teljesül a megadott feltétel, hisz $f_1 + f_2(1) = 4$. Azaz NEM alkotnak ezek a polinomok vektorteret.

(k) azon legfeljebb harmadfokú polinomok, ahol $f(1) = 0$;
Ezek a polinomok vektorteret alkotnak. Hiszen zártak lesznek az összeadásra és a skalárral való szorzásra is.

(l) a legfeljebb harmadfokú polinomok között lévő páros polinomok.
Ezek vektorteret alkotnak, mivel ezek a $p(x) = a + bx^2$ polinomok.

2. Az előző feladatban ahol vektorteret kapunk határozzuk meg egy bázisát!
(b)-ben bázis: $v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (0, 0, 1)$
(c)-ben bázis: $v_1 = (1, 0, -1) \quad v_2 = (0, 1, -1)$
(e)-ben bázis: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
(f)-ben bázis: $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
(i)-ben bázis: $1, x, x^2, x^3$
(k)-ban bázis: $p_1(x) = x - 1, p_2(x) = x(x - 1), p_3(x) = x^2(x - 1)$
(l)-ben bázis: $p_1(x) = 1, p_2(x) = x^2$

3. Döntse el, hogy az alábbi halmazok $\mathbb{R}^3$-ben, lineárisan függetlenek, generátorrendszert alkotnak, bázist alkotnak-e!

(a) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,3,1)$
Két vektor akkor lehet lineárisan összefüggő, ha egymás konstansszorosa. Ez a két vektor egymásnak nem konstansszorosa, így lineárisan függetlenek. Nem alkotnak generátorrendszert, mivel az egységvektorokat nem tudjuk előállítani a segítségükkel. Így ez a két vektor nem alkot bázist.

(b) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,3,-1)$, $v_3 = (5,-1,-1)$
A lineáris függetlenség meghatározásához ki kell számolnunk a három vektor alkotta 3x3-as mátrix determinánsát. Ezen determináns értéke -58, amely nem egyenlő 0-val. Tehát ezek a vektorok lineárisan függetlenek. Háromdimenziós térben vagyunk, így bármely 3 lineárisan független vektor generátorrendszert és bázist is alkot. (A determinánst a szokott módon határozzuk meg.)

(c) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,3,-1)$, $v_3 = (2,5,2)$
lineáris függetlenség meghatározásához ki kell számolnunk a három vektor alkotta 3x3-as mátrix determinánsát. Ezen determináns értéke 0. Tehát ezek a vektorok nem lesznek lineárisan függetlenek.Így nem alkothatnak sem bázist, sem generátorrendszert.

(d) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,3,-1)$, $v_3 = (1,0,0)$
A linerási függetlenség meghatározásához ki kell számolnunk a három vektor alkotta 3x3-as mátrix determinánsát. Ezen determináns értéke -11, amely nem egyenlő 0-val. Tehát ezek a vektorok lineárisan függetlenek. Háromdimenziós térben vagyunk, így bármely 3 lineárisan független vektor generátorrendszert és bázist is alkot.

4. (a) Mutassuk meg, hogy $\mathbf{v_1} = (0,3,1,-1)$, $\mathbf{v_2} = (6,0,5,1)$, és $\mathbf{v_3} = (4,-7,1,3)$ lineárisan függő rendszert alkotnak R^4-ben.
Úgy tudjuk belátni a lineáris összefüggőséget, hogy felírjuk ezen három vektor lineáris kombinációját és az együtthaókról belátjuk, hogy nem 0-k. A következő egyenletrendszert kell megoldani:

$$\lambda_1\mathbf{v_1} + \lambda_2\mathbf{v_2} + \lambda_3\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $\lambda_1 = 14; \lambda_2 = -4; \lambda_3 = 6$. Azaz ezekkel az együtthatőkkal számolva megkapjuk a fenti vektorokból a 0 vektort. (Természetesen nem ezek az egyetlen megfelelő együtthatók. Arányosan változtatva őkett több jó megoldást kapunk.)

(b) Fejezzük ki mindegyik vektort a másik kettő lineáris kombinációjaként!
Ezt egész egyzserűen megtehetjük, csupán a fent megkapott egyenletet kell mindig átrendeznünk a megfelelő vektorra.
Az eredeti egyenlet:

$$14\mathbf{v_1} - 4\mathbf{v_2} + 6\mathbf{v_3} = \mathbf{0}$$

Ebből fogjuk kifejezni a megfelelő vektorokat:

$$\mathbf{v_1} = \frac{2}{7}\mathbf{v_2} - \frac{3}{7}\mathbf{v_3}$$

$$\mathbf{v_2} = \frac{7}{2}\mathbf{v_1} + \frac{3}{2}\mathbf{v_3}$$

$$\mathbf{v_3} = \frac{2}{3}\mathbf{v_2} - \frac{7}{3}\mathbf{v_1}$$

5. Mutassuk meg, hogy az alábbi halmaz bázist alkot M_{22}-ben!

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Akkor alkotnak ezek a mátrixok bázist, ha lineárisan függetlenek. Ezt pedig úgy tudjuk ellenőrizni, hogy csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullmátrixot. Azaz csak akkor kapjuk meg a nullmátrixot, ha a lineáris kombinációjukban minden együttható 0.
Tehát a következőt kell megoldanunk:

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = 0$$

Ez egyenletrendszer alakban:

$$3\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \quad 6\lambda_1 - \lambda_2 - 8\lambda_3 = 0$$

$$3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \quad -6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0$$

Megoldva ezt az egyenletrendszert megkapjuk, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Azaz ez a négy mátrix tényleg bázist alkot.

6. Határozzuk meg az R^3 alábbi altereinek a bázisait!

   (a) A $3x - 2y + 5z = 0$ egyenletű sík
   Ez tehát egy sík, ami kétdimenziós altérnek számít, így két egymással nem párhuzamos vektor megadja a bázist. Hiszen két nem párhuzamos vektor már maximális lineáris független rendszert alkot, azaz bázis.
   Két ilyen vektor tehát: $(2, 3, 0); (0, 5, 2)$. Ezek benne vannak a síkben, hiszen kielégítik a sík egyenletét, és nem párhuzamosak ez is látható.

   (b) Az $x - y = 0$ egyenletű sík
   A fentihez hasonlóan ez is egy sík, ami kétdimenziós altérnek számít, így két egymással nem párhuzamos vektor megadja a bázist. Hiszen két nem párhuzamos vektor már maximális lineáris független rendszert alkot, azaz bázis.
   Két ilyen vektor tehát: $(1, 1, 0); (0, 0, 1)$. Ezek benne vannak a síkben, hiszen kielégítik a sík egyenletét, és nem párhuzamosak ez is látható.

   (c) Az $x = 2t$, $y = -t$, $z = 4t$ egyenes
   Az egyenes egydimenziós altér, így egyetlen vektor megadja a bázisát. Ugyanis csak egy vektor már maximálisan független rendszer lesz.
   A keresett bázis: $(2, -1, 4)$.

   (d) Az (a, b, c) alakú vektorok, ahol $b = a + c$
   Ez is kétdimenziós altér lesz a koordináták közötti kapcsolat miatt. Tehát itt is 2 egymással nem párhuzamos vektor már maximális lineáris független rendszer lesz, azaz bázis.
   Két ilyen vektor: $(1, 0, -1), (1, 2, 1)$. Ezek kielégítik a fenti feltételt és nem párhuzamosak.

7. Keressük meg egy bázisát az R^4 megadott vektorai által kifeszített alterének.

   (a) $(1, 1, -4, -3)$, $(2, 0, 2, -2)$, $(2, -1, 3, 2)$
   A bázis megkereséséhez a vektorokat mátrixba tesszük, és Gauss-eliminációt hajtunk végre. Ekkor a nem 0 sorok megadják a kifeszített altér bázisát. A Gauss-elimináció lépéseit nem részletezem, csupán a végeredményt írom le.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & -2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

   Látható, hogy a Gauss-elimináció során nem keletkezett csupa 0 sor, így azt mondhatjuk, hogy ez a 3 vektor lineárisan független, azaz ebben az altérben ez a 3 vektor bázist alkot.

   (b) $(-1, 1, -2, 0)$, $(3, 3, 6, 0)$, $(9, 0, 0, 3)$
   A bázis megkereséséhez a vektorokat mátrixba tesszük, és Gauss-eliminációt hajtunk végre. Ekkor a nem 0 sorok megadják a kifeszített altér bázisát. A Gauss-elimináció lépéseit nem részletezem, csupán a végeredményt írom le.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 3 \end{bmatrix}$$

   Látható, hogy a Gauss-elimináció során nem keletkezett csupa 0 sor, így azt mondhatjuk, hogy ez a 3 vektor lineárisan független, azaz ebben az altérben ez a 3 vektor bázist alkot.

(c) $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$, $(-2,0,2,2)$, $(0,-3,0,3)$
A bázis megkereséséhez a vektorokat mátrixba tesszük, és Gauss-eliminációt hajtunk végre. Ekkor a nem 0 sorok megadják a kifeszített altér bázisát. A Gauss-elimináció lépéseit nem részletezem, csupán a végeredményt írom le.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \ldots \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a Gauss-elimináció során nem keletkezett csupa 0 sor, így azt mondhatjuk, hogy ez a 4 vektor lineárisan független, azaz ebben az altérben ez a 4 vektor bázist alkot.

8. Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{b}$ vektor benne van-e az A mátrix oszlopvektorai által kifeszített térben! Ha benne van, akkor fejezzük ki $\mathbf{b}$-t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként!

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$
A feladatmegoldása során lényegében meg kell oldanunk a következő lineáris egyenletrendszert: $Ax = b$, ahol x koordinátái megadják majd a lineáris kombinációban a keresett együtthatókat. Ehhez a mátrix kibővített alakjával dolgozunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -18 & 18 \end{bmatrix}$$

Azaz ebből már megvan a keresett két együttható (ezek egyértelműek): $x_1 = 1, x_2 = -1$. Ezek segítségével tudjuk kifejezni b-t az oszlopvektorok lineáris kombinációjaként.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
A feladatmegoldása során lényegében meg kell oldanunk a következő lineáris egyenletrendszert: $Ax = b$, ahol x koordinátái megadják majd a lineáris kombinációban a keresett együtthatókat. Ehhez a mátrix kibővített alakjával dolgozunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -8 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből az alakból azt látjuk, hogy az utolsó sorban ellentmondásra jutottunk, azaz ez a b vektor nemlesz benne az A mátrix oszlopvektorai terében. Így nem tudjuk kifejezni lineáris kombinációként.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
A feladatmegoldása során lényegében meg kell oldanunk a következő lineáris egyenletrendszert: $Ax = b$, ahol x koordinátái megadják majd a lineáris kombinációban a keresett együtthatókat. Ehhez a mátrix kibővített alakjával dolgozunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből már meghatározhatóak a keresett együtthatók, amelyek azonban nem egyértelmüek a megfelelő arányokat tartva több jó megoldás is létezik. $x_1 = 1, x_2 = -1 + t, x_3 = t$.