Zh-k összpontszáma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Vizsga	Zh+vizsga	Jegy

Matematika A2 vizsga Név:
2014. május 27., 10-12., Építőmérnöki BSc szak Neptun kód:

Az utolsó három feladatból összesen el kell érni 30%-ot!

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sor konvergenciáját!
Megoldás: Jelölje s_n az $a_1 + \cdots + a_n$ részletösszegek sorozatát. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha az s_n részletösszegek sorozata tart egy véges L számhoz.
Formálisan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = L$.

(b) *(3+2 pont)* Mutassa meg, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ sorozat konvergens! Számítsa ki az értékét!
Megoldás: A sor konvergenciáját legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy észrevesszük, hogy a sor Leibniz-típusú. Hiszen $(-1)^n$ alternáló, a $1/2^n$ pedig monoton csökkenően tart 0-hoz. Tehát a sor kornvergens.
Egy másik lehetőség az, hogy közvetlenül kiszámoljuk, hogy a sor hová tart. Mivel ez a másik feladat, ezért bizonyos értelemben ez gazdaságosabb. A sor egy mértani sor (azaz $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ alakú), melynek $q = -1/2$ kvóciense abszolútértékben kisebb mint 1, tehát a hányados kritérium alapján tudjuk, hogy konvergens, és tart a $a\frac{1}{1-q}$. Jelen esetben $a = -1/2$ és $q = -1/2$ azaz a sor a $-1/3$.

2. (a) *(2 pont)* Definiálja az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0)-ban vett gradiensét!
Megoldás: Tegyük fel, hogy az $f(x, y)$ függvény mindkét parciális deriváltja létezik az (x_0, y_0) pontban. Ekkor a $gradf(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ vektort gradiensvektornak hívjuk.
(Itt az $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ illetve $f'_x(x_0, y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$ az x- illetve y- szerinti parciális deriváltakat jelölnek.)

(b) *(2+4 pont)* Mit mutat meg a gradiens geometriailag? Bizonyítsa be a kimondott állítást!
Megoldás: Lásd Többváltozós függvények jegyzet 4-5 oldal.

3. (a) *(3 pont)* Hogyan definiáljuk a V skalárszorzatos vektortérben az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok által bezárt szöget?
Megoldás: Az $\underline{u}, \underline{v} \in V$ vektorok által bezárt szög $alpha$, ahol
$$\cos\alpha = \frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}.$$
(A fenti definíció értelmes, mert
$$|\frac{< u, v >}{||u|| \cdot ||v||}| \le 1.)$$

(b) *(3 pont)* Legyen az $\mathbb{R}^4$-ben az $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ és $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ vektorok skalárszorzata $< \underline{u}, \underline{v} >= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$. Határozza meg az $\underline{u} = (2, 1, 3, 2)$ és $\underline{v} = (1, -1, 2, 0)$ vektorok által bezárt szöget!
Megoldás: Az (a) rész értelmében határozzuk meg $\cos\alpha$ értékét. Ez
$$\frac{2 - 1 + 6 + 0}{\sqrt{4 + 1 + 9 + 4}\sqrt{1 + 1 + 4 + 0}} = \frac{7}{6\sqrt{3}}.$$

Ebből $\alpha = \arccos \frac{7}{6\sqrt{3}} = 47,65°$

4. *(6 pont)* Határozza meg az $f(x) = ch2x$ függvény 0-körüli Taylor-sorának első négy nemnulla tagját!
Megoldás: Tudjuk, hogy $ch2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$. Ezért elegendő meghatározni az e^{2x} és az e^{-2x} függvények 0 körüli Taylor-sorát. Ezek

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$$

és

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}.$$

Vegyük észre, hogy a páratlan indexű tagok kiesnek. Az összegük tehát

$$ch2x = 1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \dots.$$

Ebből könnyen leolvasható, hogy az első 4 nem nulla együttható rendre: 1, 2,2/3,4/45.

5. *(7 pont)* Határozza meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszer megoldását!

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 5 \\ 3x - y + z &= 4 \\ x - 2y - 4z &= -15 \end{aligned}$$

Megoldás: Elkészítve a lineáris egyenletrendszerhez tartozó együttható mártixot, majd a Gauss-elimináció lépéseit végezve a következőt kapjuk.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Ennek determinánsa: 56. A $b = (5, 4, -15)^T$ oszlopvektort rendre az A mátrix 1.,2.,3. oszlopával helyettesítve adódik:

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -15 & -2 & -4 \end{pmatrix},$$

ennek determinánsa: 56;

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & -15 & -4 \end{pmatrix},$$

ennek determinánsa: 112;

$$\underline{\underline{A}}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -15 \end{pmatrix},$$

ennek determinánsa: 168.
A Cramer-szabály értelmében: $x_j = \frac{\det \underline{\underline{A}}_j}{\det \underline{\underline{A}}}$. Tehát a megoldás: $x_1 = 56/56 = 21/28 = 1$, $x_2 = 112/56 = 2$ és $x_3 = 168/56 = 3$.

6. *(7 pont)* Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ és $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Határozza meg a $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{AB}}$ mátrix inverzének sajátértékeit, sajátvektorait!

   Megoldás: Először kiszámítjuk a szorzatot

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{AB}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   A mártix inverzét vagy Gauss-eliminációval vagy adjungáltak segítségével számíthatjuk ki. A második módszer itt cérevezetőbb. Mivel a mátrix determinánsa a 3, így adódik:

$$\underline{\underline{C^{-1}}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

   Majd megoldjuk a sajátérték problémát, azaz kiszámítjuk a $\underline{\underline{C}}^{-1} - \lambda \underline{\underline{I}}$ determinánsát. Ez esetünkben

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3}.$$

   Ennek a gyökei $\lambda_1 = \frac{1}{3}, \lambda_2 = 1$. Ekkor a sajátvektorok meghatározásához behelyettesítünk:

   1. eset:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   Ekkor a λ_1-hez tartozó a sajátvektor $v_1 = (x, -x)$ alakú. (pl: $(1, -1)$) 2.eset:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   Ekkor a λ_2-hez tartozó a sajátvektor $v_2 = (x, x)$ alakú. (pl: $(1, 1)$)

7. *(7 pont)* Határozza meg az egységnyi térfogatú téglatest közül a legkisebb felszínűt!

   Megoldás: Legyenek a téglatest oldalai rendre x, y és z. Ekkor a feladat feltétele szerint: $xyz = 1$, $x, y, z > 0$. Cél meghatározni a minimumát az $f(x, y, z) = 2(xy + yz + zx)$ függvénynek (ez a felszín). A feladatot megoldhatjuk Lagrange-multiplikátor módszerrel a $g(x, y, z) = xyz - 1 = 0$ feltétel mellett. Legyen $h(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = 2(xy + yz + zx) - \lambda(xyz - 1)$. Számítsuk ki a 4 változó szerinti parciális deriváltakat. A feltétel szerint mindegyikben el kell tűnnie a függvénynek, azaz

   (a)
$$0 = h_x(x, y, z, \lambda) = 2(y + z) - \lambda(yz),$$

   (b)
$$0 = h_y(x, y, z, \lambda) = 2(x + z) - \lambda(xz),$$

   (c)
$$0 = h_z(x, y, z, \lambda) = 2(x + y) - \lambda(xy),$$

   (d)
$$0 = h_\lambda(x, y, z, \lambda) = (xyz - 1).$$

   Az első három egyenletből ((a)-(c)) adódik, hogy

$$\lambda = \frac{2(y + z)}{yz} = \frac{2(x + z)}{xz} = \frac{2(x + y)}{xy},$$

azaz

$$\lambda/2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{x}.$$

Ebből azonnal adódik, hogy a függvény szélsőérték helye akkor van, ha $x = y = z$. Ekkor a (d) egyenletből jön, hogy $xyz = x^3 = 1$, azaz $x = y = z = 1$. Ekkor a téglatest egy kocka, és a felszíne $2(1 + 1 + 1) = 6$.

Még le kell ellenőrizni, hogy ez valóban minimum hely. Ehhez elegendő egy tetszőleges más pont hármasra kiszámolni a felszín értékét. Legyen $x' = 1, y' = 1/2, z' = 2$, ekkor $x'y'z' = 1$ automatikusan teljesül. A felszín értéke pedig 2(2+1/2+1)=7.

Tehát az $x = y = z = 1$ valóban lokális minimum hely és mivel ez az egy minimum helye van az f görbének, ez globális is.

8. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x, y) = y^{3/2} - x^{3/2}$ függvény által generált felület felszínét a $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 4\}$ tartomány felett!
Megoldás: A felszín kiszámításához hazsnáljuk a következő képletet:

$$A(f) = \int\int_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy$$

A D tartomány a $[0, 2] \times [0, 4]$ téglatestnek az $x = y$ egyenes fölötti része. A parciális deriváltak könnyen kiszámolhatóak:

$$f_x = -\frac{3}{2}x^{1/2},$$
$$f_y = \frac{3}{2}y^{1/2}.$$

Tehát az integranus: $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + 9/4x + 9/4y}$. Tehát az felszín a következő alakot ölti:

$$A(f) = \int_0^2 \int_x^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y} dydx.$$

Külön kiszámolva az

$$\begin{aligned} \int_x^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y} dy =& \frac{3}{2}\int_x^4 \sqrt{\frac{4}{9} + x + y} dy = \\ = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\Big[(\frac{4}{9} + x + y)^{3/2}\Big]_{y=x}^4 =& (\frac{40}{9} + x)^{3/2} - (\frac{4}{9} + 2x)^{3/2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Tehát

$$\begin{aligned} A(f) =& \int_0^2 ((40/9 + x)^{3/2} - (4/9 + 2x)^{3/2})dx = \int_0^2 (40/9 + x)^{3/2} dx - \int_0^2 (4/9 + 2x)^{3/2} dx = \\ =& 2/5\Big[(40/9 + x)^{5/2}\Big]_{x=0}^2 - 2/5\Big[(4/9 + 2x)^{5/2}\Big]_{x=0}^2 = \\ =& 2/5\Big(((58/9)^{5/2} - (40/9)^{5/2}) - (40/9)^{5/2} - (4/9)^{5/2})\Big) = 2/5 \cdot (58/9)^{5/2} - (4/9)^{5/2}. \end{aligned}$$

9. *(6 pont)* Legyen a $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, z > 0\}$ félgömb sűrűségfüggvénye $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Határozza meg D tömegét!
Megoldás: A tömeg (m) meghatározásához integrálni kell a sűrűségfüggvényt adott az térfogatú testben, amely most egy félgömb. Tehát

$$m = \int\int\int_D f(x, y, z) dxdydz$$

mennyiséget kell meghatározni.: A gömbkoordinátás helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$ Az új változók:

$0 \leq u \leq \pi/2$,
$0 \leq v \leq 2\pi$,
$0 \leq r \leq 10$.

A változók így írhatóak: $x = r \sin u \cos v$,
$y = r \sin u \sin v$,
$z = r \cos u$.

Azaz $(x, y, z) = g(r, u, v) = (g_1(r, u, v), g_2(r, u, v), g_3(r, u, v)) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$ Ekkor a Jacobi determináns abszolútértéke:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin u \cos v & \sin u \sin v & \cos u \\ r \cos u \cos v & r \cos u \sin v & -r \sin u \\ -r \sin u \sin v & r \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = r^2 \cdot |\sin u|.$$

Az integrál ekkor a következő képpen írható fel:

$$\int_{u=0}^{\pi} \int_{v=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{10} r^2 \cdot r^2 \sin u dr dv du = 2\pi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{10} \cdot \left[-\cos u\right]_{u=0}^{\pi} = 80000\pi.$$