Matematika A2 vizsga mgeoldása

2013. június 4.

1. (a) *(3 pont)* Definiálja az $f(x, y)$ függvény határértékét az (x_0, y_0) helyen!

   Megoldás: Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$. Legyen az $f(x, y)$ függvény értelmezve az (x_0, y_0) pont körüli kicsi körön legfeljebb az (x_0, y_0) pontot kivéve. Ekkor azt mondjuk, hogy az $f(x, y)$ függvény határértéke az L szám, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f(x, y) - L| < \varepsilon$, ha $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$.

   (b) *(4 pont)* Konvergens-e az $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4+y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ függvény az $(x_0, y_0) = (0, 0)$ helyen?

   Megoldás: Közelítsünk az origóba különböző m meredekségű egyenesek mentén (azaz $y = mx$). Tudjuk, hogy ha a függvénynek létezik a megadott pontban határértéke, akkor annak útfüggetlennek kell lennie. Ezek alapján

$$\lim_{(x_0,y_0)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^4 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 mx}{x^4 + (mx)^4} = \frac{m}{1 + m^4}.$$

   Azaz a fenti határérték függ m-től, ami egyben azt jelenti, hogy a függvény határértéke a fenti pontban függ attól, hogy milyen meredekségű egyenes mentén tartunk az origóba, így nem létezik.

2. (a) *(3 pont)* Definiálja, hogy mikor mondjuk, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok a V vektortérben lineárisan függetlenek!

   Megoldás: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\} \in V$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \lambda_n\underline{v}_n = \underline{0}$ egyenletnek csak triviális megoldása van, azaz $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   (b) *(3 pont)* Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^3$-ben a $\underline{v}_1 = (3, 2, 1)$, $\underline{v}_2 = (1, 1, 1)$ és $\underline{v}_3 = (-1, 2, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek?

   Megoldás: A vektorok lineáris függetlenségét a fenti definíció alapján ellenőrizzük, azaz megoldjuk a $\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \lambda_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ egyenletrendszert. Azaz

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

   A fenti Gauss-elimináció lépései: először megcseréljük az első és harmadik sort; majd a második sorból kivonjuk az első sor kétszeresét, a harmadikból pedig az első sor háromszorosát; végül pedig a harmadik sorból kivonjuk a második sor kétszeresét.
   A fenti alakból leolvasható, hogy az egyenletrendszer egyetlen megoldása: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$ és $\lambda_3 = 0$. Azaz a $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ és $\underline{v}_3$ lineárisan függetlenek.

3. *(7 pont)* Mondja ki és bizonyítsa be a pozitív tagú $\sum a_n$ végtelen sorra vonatkozó gyökkritériumot!

Megoldás:
Állítás: Legyen $\sum a_n$ csupa pozitív tagból álló végtelen sor. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varrho$. Ekkor

(a) Ha $\varrho < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens.

(b) Ha $\varrho > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

(c) Ha $\varrho = 1$, akkor a kritérium nem alkalmazható.

Bizonyítás:

(a) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varrho < 1$, akkor rögzített $\varrho < r < 1$ esetén létezik alkalmas pozitív egész N szám, hogy $n > N$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < r$, azaz $a_n < r^n$. Meg kell mutatnunk, hogy az s_n n-edik részletösszegek felülről korlátosak.

$$s_n = a_1 + \cdots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \cdots + a_n < a_1 + \cdots + a_{N-1} + r^N + r^{N+1} + \cdots + r^n <$$

$$< a_1 + \cdots + a_{N-1} + r^N + r^{N+1} + \cdots < a_1 + \cdots + a_{N-1} + \frac{r^N}{1-r}$$

(b) Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \varrho > 1$, akkor létezik N alkalmas pozitív egész, hogy $n > N$ esetén $\sqrt[n]{a_n} > 1$ teljesül, azaz $\lim a_n \neq 0$, azaz $\sum a_n$ divergens.

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ esetén $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ és a sor divergens. Míg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ esetén $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$ és a sor konvergens. Tehát ebben az esetben a kritérium nem segít a döntésben.

4. *(6 pont)* Határozza meg az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(x+1)^n$ hatványsor konvergenciatartományát!

Megoldás: A fenti hatványsor középpontja $x_0 = -1$ és együtthatója $c_n = \frac{2^n}{n^2}$. A konvergenciatartomány meghatározásának első lépése a konvergenciasugár meghatározása. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = 2.$$

Azaz $R = 1/2$ lesz a konvergenciasugár. Tehát a $(-1-1/2; -1+1/2) = (-3/2; -1/2)$ nyílt intervallum biztosan része a konvergenciatartománynak. De még meg kell vizsgálnunk mi a helyzet az intervallum két végpontja esetén.
Ha $x = -3/2$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} \left(-\frac{3}{2} + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

végtelen sort kapjuk, ami előjelváltó, és így a Leibniz-kritétium alapján konvergens (hisz $\frac{1}{n^2}$ monoton csökkenve nullához tart).
Míg ha $x = -1/2$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}(-\frac{1}{2} + 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

végtelen sort kapjuk, ami konvergens.
Tehát a konvergenciatartomány a $[-3/2; -1/2]$ zárt intervallum.

5. *(6 pont)* Számítsa ki a

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinánst!

Megoldás: A determinánst a harmadik oszlop szerint célszerű kifejteni, mert az jár a legkevesebb számolással.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2) \cdot [(12 + 0 + 16) - (0 + 32 + 9)] + 1 \cdot [(0 + 9 + 32) - (0 + 12 + 48)] = (-2) \cdot (-13) + 1 \cdot (-19) = 7$$

6. (a) *(4 pont)* Határozza meg $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix}$. mátrix sajátértékeit, sajátvektorait.

Megoldás: Először a mátrix sajátértékeit számoljuk, amik a $\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right)$ karakterisztikus polinom gyökei. A karakterisztikus polinom:

$$\det\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 \\ 3 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(17-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 26\lambda + 144.$$

A karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 8$ és $\lambda_2 = 18$.
Ezek után következik a sajátvektorok kiszámítása, ami minden esetben az $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}\right) \underline{v} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása.
Azaz $\lambda_1 = 8$ esetén

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A fenti Gauss-elimináció lépései: kivonjuk az első sor háromszorosát a második sorból. Ezek alapján kapjuk, hogy a $\underline{v}$ sajátvektor második v_2 koordinátája tetszőlegesen megválasztható, míg az első koordináta a második (-3)-szorosa. Azaz $\underline{v} = (-3t; t)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.
$\lambda_2 = 18$ esetén

$$\left(\begin{array}{cc|c} -9 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A fenti Gauss-elimináció lépései: először megcseréljük a kér sort, majd kivonjuk az első sor háromszorosát a második sorból. Ezek alapján kapjuk, hogy a $\underline{v}$ sajátvektor második v_2 koordinátája tetszőlegesen megválasztható, míg az első koordináta a második 1/3-szorosa. Azaz $\underline{v} = (t; 3t)$, ahol $t \in \mathbb{R}$.

(b) *(4 pont)* Ábrázolja a $9x^2 + 6xy + 17y^2 = 1$ egyenletnek eleget tevő pontokat!

Megoldás: A fenti egyenlet a következő alakba írható:

$$(x;y) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.$$

Azaz az (a)-részben lévő $\underline{\underline{A}}$ mátrixot kell transzformálnunk ahhoz, hogy felismerhessük, milyen görbét ír le az egyenlet. Tudjuk, hogy $\underline{\underline{A}}$ szimmetrikus, emiatt létezik egy ortogonális $\underline{\underline{P}}$ mátrix, ami őt diagonalizálja.

$$\underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{P}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

A fenti formulát átrendezve kapjuk, hogy $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{P}}^T$. Így ha végrehajtjuk az

$$(x'; y') = (x, y) \cdot \begin{pmatrix} -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

transzformációt (ez mutatja meg, hogy az x, y tengelyt milyen iránybe kell transzformálnunk), akkor az eredeti egyenletünk a

$$8(x')^2 + 18(y')^2 = 1$$

alakba írható, ami egy ELLIPSZIS-t határoz meg.

7. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x, y) = 4xy$ függvény maximumát az $x^4 + y^4 = 1$ egyenletnek eleget tevő görbén!

Megoldás: A feltételfüggvény tehát a következő: $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$. Képezzük a $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ függvényt, és ennek keressük meg azon pontjait, ahol a paricális deriváltak eltűnnek. $h'_x(x, y, \lambda) = 4y - \lambda \cdot 4x^3$, $h'_y(x, y, \lambda) = 4x - \lambda \cdot 4y^3$, míg $h'_\lambda(x, y, \lambda) = -x^4 - y^4 + 1$. Azaz meg kell oldanunk a

$$4y - \lambda \cdot 4x^3 = 0 \qquad 4x - \lambda \cdot 4y^3 = 0 \qquad -x^4 - y^4 + 1 = 0$$

egyenletrendszert. Kifejezve az első két egyenletből λ-t kapjuk, hogy $\lambda = \frac{y}{x^3}$ illetve $\lambda = \frac{x}{y^3}$. Ezen két egyenletet egyenlővé téve kapjuk, hogy $y^4 = x^4$, azaz $|y| = |x|$. Ezt visszahelyettesítve a harmadik egyenletbe: $-2x^4 + 1 = 0$, azaz $x^4 = 0{,}5$. Ennek megoldásai: $x_1 = \sqrt[4]{0{,}5}$ és $x_2 = -\sqrt[4]{0{,}5}$. Azaz meghatározva az y értékeket is kapjuk, hogy a lehetséges szélsőérték-helyek: $(\sqrt[4]{0{,}5};\ \sqrt[4]{0{,}5})$, $(\sqrt[4]{0{,}5};\ -\sqrt[4]{0{,}5})$, $(-\sqrt[4]{0{,}5};\ \sqrt[4]{0{,}5})$ és $(-\sqrt[4]{0{,}5};\ -\sqrt[4]{0{,}5})$.
Ezekben a pontokban kell tehát megvizsgálnunk a függvény helyettesítési értékeit:

$$f(\sqrt[4]{0{,}5};\ \sqrt[4]{0{,}5}) = 4\sqrt{0{,}5} \qquad f(\sqrt[4]{0{,}5};\ -\sqrt[4]{0{,}5}) = -4\sqrt{0{,}5}$$

$$f(-\sqrt[4]{0{,}5};\ \sqrt[4]{0{,}5}) = -4\sqrt{0{,}5} \qquad f(-\sqrt[4]{0{,}5};\ -\sqrt[4]{0{,}5}) = 4\sqrt{0{,}5}$$

Tehát a keresett feltételes maximumhelyek: $(\sqrt[4]{0{,}5};\ \sqrt[4]{0{,}5})$ és $(-\sqrt[4]{0{,}5};\ -\sqrt[4]{0{,}5})$, míg a maximum értéke $4\sqrt{0{,}5}$.

8. *(7 pont)* Határozza meg az $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ függvény kettős integrálját a $T = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y < 0\}$ tartományon!

Megoldás: Felrajzolva a tartományt azt láthatjuk, hogy T egy körgyűrű része. Így polárkoordinátás helyettesítést hajtunk végre. Azaz $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, míg a Jacobimátrix determinánsa: $|J| = r$. A feladat szövege alapján felírhatóak a határok: $1 \leq r \leq 2$, $\dfrac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \dfrac{7\pi}{4}$. Így a kettősintegrál:

$$\int\int_T \frac{1}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\int_1^2 \frac{1}{1+r^2}\cdot r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\int_1^2 \frac{2r}{1+r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[\ln(1+r^2)\right]_1^2 \mathrm{d}\varphi = (\ln 5 - \ln 2)\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} 1\mathrm{d}\varphi = \pi\left(\ln 5 - \ln 2\right).$$

9. *(6 pont)* Határozza meg az $f(x,y,z) = y$ függvény hármasintegrálját a $T = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ kockán!

Megoldás: Mivel kockatartományról van szó, így az integrálás sorrendje tetszőlegesen megválasztható. Tehát a hármasintegrál:

$$\int\int\int_T f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 y\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \int_{-1}^1\int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 0$$