

# Matematika A2

## 7. gyakorlat

1. Keressük meg a megadott mátrix **(i)** sorainak egy bázisát, **(ii)** oszlopainak egy bázisát, **(iii)** és határozzuk meg a mátrix rangját!

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & 6 & 6 & 3 \\ 5 & -3 & 10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$

2. Keressünk egy olyan részhalmazát az alábbi vektoroknak, amely az öt vektor által kifeszített tér egy bázisát alkotja! Minden vektort írjuk fel a kapott bázis elemienek lineáris kombinációjaként!  
 $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0, 3)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (2, -5, -3, 6)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v}_4 = (2, -1, 4, -7)$ ,  $\mathbf{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$
3. Keressünk egy csak sorvektorokból álló bázisát a sortérnek, és egy csak oszlopvektorokból álló bázisát az oszloptérnek.

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ -3 & 6 & 12 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b)  $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & -5 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

4. Az alább megadott információk alapján határozzuk meg, hogy az  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  lineáris egyenletrendszernek hány megoldása van, és hogy a megoldásoknak hány paramétere van!

	$A$ mérete	$A$ rangja	$[A \mathbf{b}]$ rangja
(a)	$3 \times 3$	3	3
(b)	$3 \times 3$	2	3
(c)	$3 \times 3$	1	1
(d)	$5 \times 9$	2	2
(e)	$5 \times 9$	2	3
(f)	$4 \times 4$	0	0
(g)	$6 \times 2$	2	2

5. Legyen  $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$  és  $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$  a  $P_2$  tér két vektora. Igazoljuk, hogy a  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$  képlettel definiált művelet tényleg skaláris szorzat (belső szorzat) a  $P_2$  téren!
6. Legyen  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  és  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ . Határozzuk meg, hogy a következők közül melyek skalár szorzatok az  $R^3$ -on.

(a)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

(b)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

(c)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 4u_3v_3$

(d)  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 + u_3v_3$

7. Igazoljuk, hogy ha  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  euklideszi skalár szorzat  $R^n$ -en és  $A$  pedig egy  $n \times n$ -es mátrix, akkor

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{Av} \rangle = \langle \mathbf{A}^T \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

8. A  $2\pi$  szerint periódikus integrálható függvények terén tekintsük a következő műveletet:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

, ahol  $\mathbf{f} = f(x)$ , és  $\mathbf{g} = g(x)$ . Igazoljuk, hogy ez a művelet valóban skalár szorzás! Számítsuk ki a  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$  értékét!

- (a)  $\mathbf{f} = \cos x$ ,  $\mathbf{g} = \sin x$
- (b)  $\mathbf{f} = \cos kx$ ,  $\mathbf{g} = \sin lx$ , ahol  $k$  és  $l$  egész számok
- (c)  $\mathbf{f} = \tan \frac{x}{8}$ ,  $\mathbf{g} = 1$

9. Az 5. feladatban megadott skaláris szorzattal számítsuk ki  $\|\mathbf{p}\|$ -t!

- (a)  $\mathbf{p} = -1 + 2x + x^2$
- (b)  $\mathbf{p} = 3 - 4x^2$

10. Legyen  $\mathbf{u} = (3, 0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 2, 7, -3)$ , és  $\mathbf{w} = (2, 0, 1, 1)$ . Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket!

- (a)  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$
- (b)  $\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
- (c)  $\| -2\mathbf{u}\| + 2\|\mathbf{v}\|$
- (d)  $\|3\mathbf{u} - 5\mathbf{v} + \mathbf{w}\|$
- (e)  $\frac{1}{\mathbf{w}}\mathbf{w}$
- (f)  $\left\| \frac{1}{\mathbf{w}}\mathbf{w} \right\|$

11. Írjuk fel az  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$  vektorok közötti euklideszi távolságot!

- (a)  $\mathbf{u} = (2, -1)$ ;  $\mathbf{v} = (3, 2)$
- (b)  $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$ ;  $\mathbf{v} = (2, 6, 0)$
- (c)  $\mathbf{u} = (2, 0, 1, 3)$ ;  $\mathbf{v} = (-1, 4, 6, 6)$
- (d)  $\mathbf{u} = (6, 0, 1, 3, 0)$ ;  $\mathbf{v} = (-1, 4, 2, 8, 3)$

12. Igazoljuk az

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

egyenlőséget bármely  $R^n$ -beli  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  vektorokra!

13. Határozzuk meg, hogy a megadott vektorok merőlegesek-e egymásra az euklideszi skaláris szorzat szerint!

- (a)  $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 3 - 1)$
- (b)  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, -1, -1)$
- (c)  $\mathbf{u} = (a, b, c)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0, 0)$
- (d)  $\mathbf{u} = (-2, 3, -5, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 1, -2, -9)$
- (e)  $\mathbf{u} = (0, -1, 2, 5)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -2, 3, 0)$
- (f)  $\mathbf{u} = (a, b)$ ,  $\mathbf{v} = (-b, a)$

14. Tekintsük  $R^3$ -on az euklideszi skalár szorzatot. Milyen  $k$  értékek mellett merőleges egymásra  $\mathbf{u}$  és  $\mathbf{v}$ ?

- (a)  $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 7, k)$
- (b)  $\mathbf{u} = (k, k, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (k, 5, 6)$