

# Matematika A2

## 12. feladatsor

1. Vázzuk fel az integrálási tartományt és számítsuk ki az integrált!

$$(a) \int_0^1 \int_0^1 x + y \, dy \, dx$$

$$(e) \int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} \, dx \, dy$$

$$(b) \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-x-y} \, dy \, dx$$

$$(f) \int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy} \, dx \, dy$$

$$(c) \int_0^{\pi} \int_0^x x \sin x \, dy \, dx$$

$$(g) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_0^{1/\cos y} 3 \cos y \, dx \, dy$$

$$(d) \int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx$$

$$(h) \int_0^3 \int_1^{4-2y} \frac{4-2y}{x^2} \, dx \, dy$$

2. Határozza meg az  $f(x, y) = x^2 + 2y$  függvény integrálját az  $A(1, 1)$ ,  $B(0, 3)$  és  $C(3, 0)$  pontok által határolt háromszögön!

3. Vázzuk fel az integrálási tartományt, írjuk fel és számítsuk ki az integrált fordított integrálási sorrenddel!

$$(a) \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$$

$$(c) \int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, dx \, dy$$

$$(b) \int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, dx \, dy$$

$$(d) \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} \, dy \, dx$$

4. Határozzuk meg a térfogatát annak az éknek, amelyet a  $z = 12 - 3y^2$  henger és az  $x + y = 2$  sík vág ki az első ténnyolcaddból!

5. Impropius kettős integrálok az egyváltozós impropius integrálokhoz hasonlóan értelmezhetők, és hasonlóan is számíthatók. Először meghatározzuk az integrált véges tartományon, és megnézzük a határértéket, amint a határok a két változóra **egymástól függetlenül** végtelenbe tartanak. Számítsuk az integrálokat kétszeres integrálként, majd vizsgáljuk az egyváltozó szerinti végtelenben vett határértéket!

$$(a) \int_1^{\infty} \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y} \, dy \, dx$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)} \, dx \, dy$$

6. Vázzuk fel az adott görbékkel határolt tartományt, azután fejezzük ki a területét mint kétszeres integrált, majd számítsuk is ki a területet!

(a) A koordinátatengelyek és az  $x + y = 2$  egyenes.

(b) Az  $x = -y^2$  parabola és az  $y = x + 2$  egyenes.

(c) Az  $x = y^2$  és  $x = 2y - y^2$  parabolák.

7. Az ebben a feladatban szereplő integrálok, ill. ezek összegei,  $xy$ -síkbeli tartományok területét adják. Vázzuk fel a tartományokat, adjuk meg a határológörbéket és a metszéspontokat! Majd számítsuk ki az integrálokat!

$$(a) \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy dx$$

$$(b) \int_{-1}^0 \int_{-2x}^{1-x} dy dx + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} dy dx \quad (c) \int_0^2 \int_{x^2-4}^0 dy dx + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx$$