# Matematika A2

## 10. feladatsor megoldása

1. Nevezzük meg az alábbi felületeket és rajzoljuk fel a grafikonjukat!

   (a) $z = 19 - x^2 - y^2$

   (b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $x^2 - y^2 = z$

   (d) $x^2 + 4z^2 = 16$

   (e) $z^2 - y^2 = 1$

   (f) $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

   (g) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

   (h) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

   (i) $(x^2/4) - y^2 - (z^2/4) = 1$

   (j) $y^2 - z^2 = 4$

2. Adjuk meg a függvény értelmezési tartományát, határozzuk meg az értékkészletét, adjuk meg a szintvonalakat, határozzuk meg az értelmezési tartomány határait, állapítsuk meg, hogy az értelmezési tartomány nyílt, vagy zárt, vagy egyik sem, döntsük el, hogy az értelmezési tartomány korlátos vagy nem!

   (a) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$ A függvény értelmezési tartománya azon $(x, y)$ pontpárpkból áll, amelyekre $y - x \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: $\mathbb{R}^2$ kivéve azon pontok, melyekre $y > x$ .
   Értékkészlete:
   Szintvonalai: $\sqrt{y - x} = c$, azaz $y = x + c^2$. Azaz a szintvonalai egyenesek, amik az y tengelyt a $c^2$ pontban metszik.

   (b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ A függvény értelmezési tartománya azon $(x, y)$ pontpárokból áll, amelyekre $9 - x^2 - y^2 \geq 0$. Azaz a függvény értelmezési tartománya: az origó középpontú három sugarú körlap pontjai.

   (c) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

3. Határozzuk meg a határértékeket!

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = e^0 \cdot 1 = 1$$

   A határérték kiszámításakor felhasználtuk, hogy a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

   (b) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy| - 1}$
   A függvény a megadott pontban folytonos, így a határérték egyszerű behyelettesítéssel számolható. A fenti határérték: $\cos 0 = 1$.

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0);x\neq y} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2$

   (d) $\lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

   $$\lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4} = \lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{2x-y-4}{2x-y-4(\sqrt{2x-y}+2)} = \lim_{(x,y)\to(2,0);2x-y\neq 4} \frac{1}{\sqrt{2x-y}+2} =$$

   A határérték kiszámoláskor gyöktelenítettük a számlálót, így már ki tudtuk számolni a határértéket.

4. Az $(x,y)$-sík mely pontjaiban folytonosak az alábbi függvények?

   (a) $f(x,y) = \sin(x+y)$
   A megadott függvény folytonos függvények öszetétele, nincs olyan tartomány, ahol nem értelmezett. Azaz ez a függvény a teljes valós síkon folytonos.
   Folytonossági pontok: $\mathbb{R}^2$.

   (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ folytonossági pontjai: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

5. Különböző görbék (ill. egyenesek) mentén vizsgálva, lássuk be, hogy az alábbi függvények határértéke nem létezik $(x,y) \to (0,0)$ esetén!

   (a) $f(x,y) = \frac{x^4}{x^4+y^2}$
   Közelítsünk a megadot pontba $y = mx^2$ parabolák mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+m^2x^4} = \frac{1}{1+m^2}$$

   Azaz látható, hogy különböző m értékekere különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

   (b) $f(x,y) = \frac{xy}{|xy|}$
   Közelítsünk a megadot pontba $y = mx$ különböző meredekségú egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{|mx^2|} = \frac{m}{|m|}$$

   Azaz látható, hogy különböző m értékekere különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

   (c) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ Közelítsünk a megadot pontba $y = mx$ különböző meredekségú egyenesek mentén. Ekkor a fenti határérték a következő módon alakítható át:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \frac{1-m}{1+m}$$

   Azaz látható, hogy különböző m értékekere különböző határértéket kapunk. Így a fenti kifejezésnek nem létezik határértéke.

6. Határozzuk meg a függvény parciális deriváltjait minden változója szerint!

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

$$f_x = 2x - y$$
$$f_y = -x + 2y$$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   (c) $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

$$f_x = y(\ln y)e^{xy}$$
$$f_y = \frac{e^{xy}}{y} + x(\ln y)e^{xy}$$

(d) $f(x,y) = \log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

$$f_x = \frac{1}{x \ln y}$$

$$f_y = -\frac{\ln x}{y \ln^2 y}$$

7. Határozzuk meg az összes másodrendű parciális deriváltat!

(a) $f(x,y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$

$$f_x = 2xy + y \cos x$$

$$f_y = x^2 - \sin y + \sin x$$

$$f_{xx} = 2y - y \sin x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2x + \cos x$$

$$f_{yy} = -\cos y$$

(b) $f(x,y) = \ln(x+y)$

$$f_x = f_y = \frac{1}{x+y}$$

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = -\frac{1}{(x+y)^2}$$

8. Milyen sorrendű deriválással kapjuk meg könnyebben $f_{xy}$-t: először $x$-szerint vagy először $y$-szerint?

(a) $f(x,y) = x \sin y + e^y$
Először x szerint kell deriválnunk, ugyanis ekkor csak az első tag marad meg, amit könnyű utána y szerint lederiválni.

(b) $f(x,y) = x^2 + 5y + \sin x + 7e^x$
Először y szerint kell deriválni, ugyanis ekkor csak a második tag marad. És azt utána könnyű x szerint deriválni.

(c) $f(x,y) = x \ln xy$ Először y szerint deriválunk, majd x szerint.

9. Mutassuk meg, hogy az $f(x,y)$ függvény egy megoldása a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Laplace-egyenletnek! (14.3: 65, 66)

(a) $f(x,y) = e^{-2y} \cos 2x$

$$f_x = -2e^{-2y} \sin 2x$$

$$f_{xx} = -4e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_y = -2e^{-2y} \cos 2x$$

$$f_{yy} = 4e^{-2y} \cos 2x$$

Látható, hogy ezek alapján tényleg teljesül a fenti állítás. Azaz

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

(b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ a $D=\Re^2/\{(0,0)\}$ tartományon.

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{xx} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_{yy} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

Kisebb számolás után látható, hogy itt is teljesül a fenti állítás. Azaz

$$f_{xx} + f_{yy} = 0$$

10. Adjuk meg a gradienst az adott pontban, azután vázoljuk fel a gradienst és azt a szintvonalat, amelyik az adott ponton átmegy!

(a) $f(x,y)=y-x$, $P_0(2,1)$

$$gradf = (f_x, f_y) = (-1, 1)$$

Azaz ezen függvény gradiense minden pontban: $(-1,1)$

(b) $f(x,y)=y-x^2$, $P_0(-1,0)$

$$gradf = (f_x, f_y) = (-2x, 1)$$

Azaz ezen függvény gradiense a megadott $P_0$ pontban: $(2,1)$.

11. Adjuk meg a függvény iránymenti deriváltját a $P_0$ pontban, $\mathbf{A}$ irányában!
A függvény iránymenti deriváltját a következő módon számoljuk: $\langle gradf, \mathbf{A}\rangle$.

(a) $f(x,y)=2xy-3y^2$, $P_0(2,1)$, $\mathbf{A}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$

$$gradf = (2y, 2x-6y), \quad gradf(P_0) = (2,-2)$$

Azaz az iránymenti derivált értéke: $\frac{8}{5} - \frac{6}{5} = \frac{2}{5}$.

(b) $f(x,y,z)=xy+e^{x-y}$, $P_0(1,1)$, $\mathbf{A}=12\mathbf{i}-5\mathbf{j}$

$$gradf = (y+e^{x-y}, x-e^{x-y}), \quad gradf(P_0) = (2,0)$$

Azaz az iránymenti derivált értéke: $\frac{12}{13}2 - \frac{5}{13}0 = 24$.

12. Adjuk meg azokat az irányokat, amelyekben a függvény az adott $P_0$ pontban a leggyorsabban növekszik, ill. csökken!

(a) $f(x,y)=x^2-y^2$, $P_0(1,1)$

(b) $f(x,y)=x+y+xy$, $P_0(0,0)$