Sorozatok

Sorozatok megadása: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ $a_n \in \mathbb{R}$:

1, **Képlettel**: pl. $a_n = \frac{1}{n}$: $a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \ldots,\ a_{100} = \frac{1}{100}, \ldots$

2, Rekurzióval: pl. Fibonacci számok: $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$
$n \geq 3$

3, Szavakkal: pl. a_n az n-edik prímszám

a_n	első néhány tag	monotonitás	korlátosság	határérték
$\frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	csökken	korlátos	0
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$	nő	korlátos	1
$(-1)^n$	$-1, 1, -1, 1, -1$	$\emptyset$	korlátos	$\emptyset$
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$	nő	alulról korlátos	$+\infty$
$(-2)^n$	$-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Def Az a_n sorozat monoton nő (csökken), ha

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$, ($a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$), azaz általában

$a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n \geq a_{n+1}$) teljesül.

Pl. 1. $a_n = \frac{1}{n}$ monoton csökken: $a_n = \frac{1}{n} < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$ ✓

2. $a_n = \frac{n}{n+1}$ monoton nő: $a_n = \frac{n}{n+1}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2} \iff n(n+2) \leq (n+1)^2 \iff n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$ ✓

vagy $a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$ nő

3.) $a_n = \frac{n}{2^n}$: $a_1 = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}{}^{,0,5}$, $a_2 = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}{}^{,0,5}$, $a_3 = \frac{3}{2^3} = \frac{3}{8} = 0{,}375$, $a_4 = \frac{4}{2^4} = 0{,}25$

$$a_n = \frac{n}{2^n} \geq a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}}{2^n} \geq \frac{n+1}{n} \Leftrightarrow 2 \geq 1 + \frac{1}{n} \checkmark$$

Def Az a_n sorozat felülről (alulról) korlátos, ha létezik L (K), hogy $a_n \leq L$ ($a_n \geq K$) teljesül minden n-re.

Ha a_n alulról is felülről is korlátos, akkor korlátosnak mondjuk.

Pl. 1.) $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow$ korlátos

2.) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\quad 0 < \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow$ korlátos

3.) $a_n = n^2$: $\quad 1 \leq n^2 \Rightarrow$ alulról korlátos, de felülről nem korlátos

Def Az a_n sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén létezik N_0, hogy $n \geq N_0$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ha létezik $A \in \mathbb{R}$ határértéke az a_n sorozatnak, akkor a_n-t konvergensnek mondjuk, egyébként az a_n sorozat divergens. Jelölés: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$.

3.

1., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}} = 1$

3., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+5}{4n^2+2n-6} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{4n^2}{n^2}+\frac{2n}{n^2}-\frac{6}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\overbrace{\left(\frac{3}{n}\right)}^{\to 0}+\overbrace{\left(\frac{5}{n^2}\right)}^{\to 0}}{4+\underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)}_{\to 0}-\underbrace{\left(\frac{6}{n^2}\right)}_{\to 0}} = \frac{1}{4}$

4., $\lim\limits_{n\to\infty} n^2$ nem létezik $a_n = n^2$ divergens

5., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+7}{n^3-7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4n^2}{n^3}+\frac{5n}{n^3}+\frac{7}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}-\frac{7}{n^3}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{1-\frac{7}{n^3}} =$

6., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^{n+1}+3^n}{4^{n+2}+2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{4^n}+\frac{3^n}{4^n}}{\frac{4^{n+2}}{4^n}+\frac{2^{n+1}}{4^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4+\overbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}^{=0}}{16+2\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n} =$

$\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

7., $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+n}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+\frac{\sqrt{n^2-n}}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2-n}{n^2}}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\to 0}}} = \frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1.$

Műveletek konvergens sorozatokkal

Tétel Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.
Ekkor

1.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = A + B$,

2.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = A - B$,

3.) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = A \cdot B$,

4.) ha $B \neq 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$,

5.) ha $c \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} c a_n = cA$.

Pl. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{2^n}{2^{n+1}+1} = 1 + \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n}{2^n}}{\frac{2^{n+1}}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}} = \frac{1}{2}$$

Def Az a_n sorozat határértéke a $+\infty$, ha minden K esetén létezik N_0, hogy $a_n \geq K$ ha $n \geq N_0$.

Pl. 1, $\lim n^2 = +\infty$

2, $\lim -n^3+n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} n^2(-n+1) = -\infty$

Nevezetes határértékek

1, Ha $|q|<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

2, Ha $c>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$

3, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Pl. 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1$.

$$1 \leq \sqrt[n]{n^2+n} \leq \sqrt[n]{n^2+n^2} = \sqrt[n]{2n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow \atop 1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\downarrow \atop 1}$$

Általában $p(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0$ $\quad b_k \neq 0$

k-adfokú polinom esetén ha $b_k > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1.$$

2. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^{n+1}+2^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n\left(4+\frac{2^n}{4^n}\right)} = \lim_{n\to\infty} 4\underbrace{\sqrt[n]{4+\left(\frac{2}{4}\right)^n}}_{\sqrt[n]{4}\approx 1} = 4$$

A $+\infty$-be tartó sorozatok közül melyik tart gyorsabban a $+\infty$-be? Tudjuk:

$\lim_{n\to\infty} \lg n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty$,

$\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} n^n = +\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lg n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Röviden:

$\lg n \ll n \ll n^2 \ll 2^n \ll n! \ll n^n$

Pl. 1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{3^n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}+10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{n!} + \frac{10^n}{n!} = 0+0=0.$

Mi a kapcsolat a monotonitás, korlátosság és konvergencia között.

Könnyen látnik, hogy egy konvergens a_n sorozat szükségképpen korlátos is. Az alábbi tétel mutatja, hogy egy monoton növő és felülről korlátos sorozat biztos konvergens is.

<u>Tétel</u> Ha az a_n sorozat monoton nő és felülről korlátos, akkor konvergens is.

<u>Biz</u> Jelölje A a legkisebb felső korlátot. Azt mutatjuk meg, hogy az a_n sorozat határértéke a A szám.

Mivel $\varepsilon > 0$ esetén $A-\varepsilon$ nem felső korlátja a_n-nek, ezért létezik N, hogy $a_N > A-\varepsilon$. A monoton növés miatt $n \geq N$ esetén

$$A-\varepsilon < a_n \leq A < A+\varepsilon \text{ is teljesül,}$$

emiatt $-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon$, azaz $|a_n - A| < \varepsilon$ ha $n \geq N$, ezért a_n határértéke létezik és az a A. ■

<u>Az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat</u>

A fejezet célja az $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ határérték segítségével az „e" szám definiálása.

Előkészületként az ún. binomiális tételt bizonyítjuk.

$(a+b)^0 = 1\cdot a^0b^0$

$(a+b)^1 = 1\cdot a^1b^0 + 1\cdot a^0b^1$

$(a+b)^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$

$(a+b)^3 = 1\cdot a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$

$(a+b)^4 = 1\cdot a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$

$\vdots$

$(a+b)^n = ?$

Együtthatók:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

<u>Def</u> Binomiális együttható: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

$n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $0! = 1$

Pl. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{120}{2\cdot 6} = 10$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$, $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

A binomiális együtthatókból formált ún. Pascal-háromszög adja az $(a+b)^n$ kifejtésében szereplő együtthatókat.

Tétel (Binomiális-tétel): $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$.

Bizonyítás: n szerinti teljes indukció:

$n=0$: $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}a^0b^0$ ✓

Tfh $n=N$ esetén igaz az állítás, azaz

$$(a+b)^N = \binom{N}{0}a^Nb^0 + \binom{N}{1}a^{N-1}b^1 + \binom{N}{2}a^{N-2}b^2 + \dots + \binom{N}{k-1}a^{N-(k-1)}b^{k-1} + \binom{N}{k}a^{N-k}b^k + \dots$$
$$\dots + \binom{N}{N-1}a^1b^{N-1} + \binom{N}{N}a^0b^{N-k}.$$

Azt kell megmutatni, hogy

$$(a+b)^{N+1} = \binom{N+1}{0}a^{N+1}b^0 + \binom{N+1}{1}a^Nb^1 + \dots + \binom{N+1}{k}a^{N+1-k}b^k + \dots +$$
$$+ \binom{N+1}{N}a^1b^N + \binom{N+1}{N+1}a^0b^{N+1}$$

Mi lesz $(a+b)^{N+1}$ kifejtésében $a^{N+1-k}b^k$ együtthatója?

$$(a+b)^{N+1} = (a+b)^N(a+b) = \left(\binom{N}{0}a^Nb^0 + \binom{N}{1}a^{N-1}b^1 + \dots + \binom{N}{k-1}a^{N-(k-1)}b^{k-1}\right.$$
$$\left. + \binom{N}{k}a^{N-k}b^k + \dots + \binom{N}{N}a^0b^N\right)\cdot(a+b)$$

Innen $a^{N+1-k}b^k$ együtthatója: $\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}$.

Elég azt igazolni, hogy $\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k} = \binom{N+1}{k}$

$$\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k} = \frac{N!}{(k-1)!\,(N-(k-1))!} + \frac{N!}{k!\,(N-k)!} = \frac{N!\,k + N!\,(N+1-k)}{k!\,(N+1-k)!} =$$
$$\frac{(N+1)\,N!}{k!\,(N+1-k)!} = \frac{(N+1)!}{k!\,(N+1-k)!} = \binom{N+1}{k}. \quad \blacksquare$$

Legyen $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Ekkor $a_1 = 2$

$a_2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$

$a_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = 2{,}37..$

$a_4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = 2{,}44..$

Tétel Az $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens.

Biz Monotonitás: $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2!}$, $\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{\uparrow}{=} \binom{n}{0}1^n\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + ..$$

Binomiális tétel: $a=1$, $b=\frac{1}{n}$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + .. =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ..$$

Hasonlóan

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + ..$$

Tagonkénti összehasonlítva a_n és a_{n+1}-et kapjuk, hogy

$a_{n+1} > a_n$.

Az a_n felülről korlátos:

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right) + ..$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots =$$

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot k}\le\frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{k-1\text{ db}}}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3. \quad \blacksquare$$

Tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határérték

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}7182\ldots=e.$$

A most definiált „e" szám a matematika egyik legfontosabb száma.

Az „e" szám határérték számításban olyan feladatoknál jön elő, ahol hatvány van és az alap az 1-hez, a kitevő a $+\infty$-hez tart.

<u>Tétel</u> $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{b_n}=e^c$, ha $a_n\to 0$, $b_n\to+\infty$ amint $n\to\infty$ és $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=c$.

Pl. 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}=e^2$, mert $a_n=\frac{1}{n+1}\to 0$, $b_n=2n\to\infty$ és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot 2n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+\sqrt{n}}{n+1}\right)^{\sqrt{2n}} = e^{\sqrt{2}}$

$\dfrac{n+\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{n+1+\sqrt{n}-1}{n+1} = 1+\dfrac{\sqrt{n}-1}{n+1}$, mit $a_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{n+1} \to 0$

$b_n = \sqrt{2n} \to \infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-1}{n+1}\sqrt{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}n-\sqrt{2n}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\sqrt{2}\cdot n}{n}-\frac{\sqrt{2n}}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$